



# CITTA' DI GROTTAMMARE

(Provincia di Ascoli Piceno)

Via Matteotti, 69 - Tel. 0735 739218 - [comune.grottammare.protocollo@emarhce.it](mailto:comune.grottammare.protocollo@emarhce.it)

Area Gestione del Patrimonio - Responsabile Arch. Liliana Ruffini

---

## MESSA IN SICUREZZA CONTRO IL RISCHIO SISMICO: RIFACIMENTO SOLAI SCUOLA "G. SPERANZA"

---

---

### Progetto Definitivo - Esecutivo

---

---

#### Stato di Progetto

---

#### Calcoli Esecutivi delle Strutture Relazione di Calcolo Stato di Fatto

(art.33 co.1 lett.d e art.37 del D.P.R. 05.10.2010, n.207)

Elab. N.1.1

NOVEMBRE 2019

---

Responsabile del progetto  
Arch. Bernardino Novelli

Responsabile del Procedimento  
Arch. Liliana Ruffini

Supporto al progetto strutturale  
Ing. Carlo Cesaroni



Collaboratori:  
Geom. Sante Cocci  
Geom. Stefania Pulcini  
Geom. Rosa Benassati

## **RELAZIONE DI CALCOLO STATO DI FATTO**

(art.33 co.1 lett.d e art. 37 del D.P.R. 05.10.2010, n.207)

Il presente progetto è inerente all'intervento di miglioramento sismico dell'edificio ospitante la scuola primaria "Giuseppe Speranza" che l'amministrazione comunale di Grottammare (AP) intende realizzare.

La presente relazione illustra le informazioni relative alle normative attualmente vigenti a cui è stato fatto riferimento per la progettazione, ai metodi di calcolo impiegati ed alle tipologie di analisi svolte.

### • **NORMATIVA DI RIFERIMENTO**

I calcoli sono condotti nel pieno rispetto della normativa vigente e, in particolare, la normativa cui viene fatto riferimento nelle fasi di calcolo, verifica e progettazione è costituita dalle *Norme Tecniche per le Costruzioni*, emanate con il D.M. 17/01/2018 pubblicato nel suppl. 8 G.U. 42 del 20/02/2018, nonché la *Circolare del Ministero Infrastrutture e Trasporti* del 21 Gennaio 2019 n. 7 C.S.LL.PP.

### • **METODI DI CALCOLO**

I metodi di calcolo adottati per studiare il comportamento degli elementi strutturali sono i seguenti:

- 1) Per i carichi statici: *METODO DELLE DEFORMAZIONI*;
- 2) Per i carichi sismici: metodo dell'*ANALISI MODALE* o dell'*ANALISI SISMICA STATICA EQUIVALENTE*.

Per lo svolgimento del calcolo si è accettata l'ipotesi che, in corrispondenza dei piani sismici, i solai siano infinitamente rigidi nel loro piano e che le masse ai fini del calcolo delle forze di piano siano concentrate alle loro quote.

Inoltre, per poter valutare il comportamento globale dell'edificio in risposta alle azioni sismiche, è stato eseguito lo studio della vulnerabilità sismica della struttura stessa allo stato attuale (stato di fatto o ante – operam).

La vulnerabilità sismica di una costruzione, il cui indicatore mette in relazione la capacità di resistenza della struttura e la richiesta in termini di resistenza e/o spostamento del sisma, delinea la predisposizione della stessa a subire danneggiamenti e crolli: pertanto, quanto più un edificio risulta vulnerabile (tipologia, progettazione inadeguata, materiali di scadente qualità, modalità di costruzione, scarsa manutenzione), tanto maggiori saranno le conseguenze su di esso.

Le procedure più complesse ed affidabili per valutare la vulnerabilità sismica di un edificio e di conseguenza studiarne il comportamento dinamico sotto l'azione sismica si basano su analisi numeriche eseguite mediante metodi di calcolo lineari e non lineari.

Nel caso in esame, per tenere conto del comportamento non lineare della struttura, il quale incide profondamente sulla sua capacità di resistere all'azione sismica, è stata condotta l'*analisi pushover o analisi sismica statica non lineare* sul modello globale agli elementi finiti dell'edificio rappresentato nella sua completezza (geometria e caratteristiche meccaniche).

Pertanto, è stata condotta l'*Analisi Pushover o Analisi sismica statica non lineare* sul modello agli elementi finiti dell'edificio allo stato di fatto rappresentato nella sua completezza (geometrica e meccanica).

Sono stati impiegati sia elementi di tipo 'frame' necessari per la modellazione di pilastri, travi, sia elementi di tipo 'shell' per la modellazione dei setti in muratura, che elementi di tipo piastra per la modellazione delle piastre in c.a.

È stata inserita la stratigrafia del terreno di fondazione, impiegando le caratteristiche geologiche di ciascuno strato, ognuno caratterizzato dai propri parametri geotecnici, ai fini di una corretta discretizzazione meccanica del sito su cui insiste l'edificio oggetto di studio.

**Nello svolgimento dell'analisi pushover, è stato considerato esclusivamente il contributo delle due componenti orizzontali dell'azione sismica tralasciando quello della componente verticale, ai sensi dei punti §3.2.3.1, § 7.3.5 e §7.2.2 del D.M.17.01.2018.**

Difatti, nel §3.2.3.1 si specifica che la componente verticale deve essere considerata *ove espressamente specificato (Capitolo 7) e purché il sito nel quale sorge la costruzione sia caratterizzato da un'accelerazione al suolo pari ad  $a_g \geq 0,15 g$ .*

Successivamente al §7.3.5 si specifica che, la risposta alle diverse componenti dell'azione sismica viene calcolata *unitariamente per le tre componenti, applicando l'espressione  $1,00 \cdot E_x + 0,30 \cdot E_y + 0,30 \cdot E_z$  in ogni caso la componente verticale deve essere tenuta in conto unicamente nei casi previsti al §7.2.2.*

Infine, al §7.2.2 si precisa che la suddetta componente verticale dell'azione sismica deve essere considerata, **in aggiunta a quanto indicato al §3.2.3.1, anche in presenza di elementi pressoché orizzontali con luce superiore a 20 m, elementi precompressi (con l'esclusione dei solai di luce inferiore a 8 m), elementi a mensola di luce superiore a 4 m, strutture di tipo spingente, pilastro in falso, edifici con piani sospesi, ponti e costruzioni con isolamento.**

Ne consegue che, sebbene il sito su cui sorge la costruzione in esame sia caratterizzato da un valore di  $a_g$  allo stato limite di salvaguardia della vita (SLV) pari a 0,272 g e quindi superiore a 0,15 g (§3.2.3.1), la tipologia di struttura oggetto del presente progetto di adeguamento sismico **non rientra** tra quelle menzionate al punto §7.2.2., motivo per cui non è stato considerato il contributo della componente verticale del sisma.

L'analisi pushover dell'edificio scolastico "Giuseppe Speranza" allo stato attuale (stato di fatto o ante-operam) è stata condotta considerando un livello di conoscenza **LC3** (conoscenza esaustiva), a cui corrisponde un fattore di confidenza pari a 1,00 tramite cui sono stati ridotti i valori medi delle resistenze del calcestruzzo e dell'acciaio degli elementi strutturali esistenti.

## • CALCOLO SPOSTAMENTI E CARATTERISTICHE

Il calcolo degli spostamenti e delle caratteristiche viene effettuato con il metodo degli elementi finiti (**F.E.M.**).

Possono essere inseriti due tipi di elementi:

- 1) Elemento monodimensionale asta (*beam*) che unisce due nodi aventi ciascuno 6 gradi di libertà. Per maggiore precisione di calcolo, viene tenuta in conto anche la deformabilità a taglio e quella assiale di questi elementi. Queste aste, inoltre, non sono considerate flessibili da nodo a nodo ma hanno sulla parte iniziale e finale due tratti infinitamente rigidi formati dalla parte di trave inglobata nello spessore del pilastro; questi tratti rigidi forniscono al nodo una dimensione reale.
- 2) L'elemento bidimensionale shell (*quad*) che unisce quattro nodi nello spazio. Il suo comportamento è duplice, funziona da lastra per i carichi agenti sul suo piano, da piastra per i carichi ortogonali.

Assemblate tutte le matrici di rigidezza degli elementi in quella della struttura spaziale, la risoluzione del sistema viene perseguita tramite il *metodo di Cholesky*.

Ai fini della risoluzione della struttura, gli spostamenti X e Y e le rotazioni attorno l'asse verticale Z di tutti i nodi che giacciono su di un impalcato dichiarato rigido sono mutuamente vincolati.

• **TIPOLOGIA DI ANALISI SVOLTA: Analisi Sismica Dinamica**

L'analisi sismica dinamica è stata svolta con il metodo dell'analisi modale; la ricerca dei modi e delle relative frequenze è stata perseguita con il *metodo di Jacobi*.

I modi di vibrazione considerati sono in numero tale da assicurare l'eccitazione di più dell'85% della massa totale della struttura.

Per ciascuna direzione di ingresso del sisma si sono valutate le forze applicate spazialmente agli impalcati di ogni piano (forza in X, forza in Y e momento).

Le forze orizzontali così calcolate vengono ripartite fra gli elementi irrigidenti (pilastri e pareti di taglio), ipotizzando i solai dei piani sismici infinitamente rigidi assialmente.

Per la verifica della struttura si è fatto riferimento all'analisi modale, pertanto sono prima calcolate le sollecitazioni e gli spostamenti modali e poi viene calcolato il loro valore efficace.

I valori stampati nei tabulati finali allegati sono proprio i suddetti valori efficaci e pertanto l'equilibrio ai nodi perde di significato. I valori delle sollecitazioni sismiche sono combinate linearmente (in somma e in differenza) con quelle per carichi statici per ottenere le sollecitazioni per sisma nelle due direzioni di calcolo.

Gli angoli delle direzioni di ingresso dei sismi sono valutati rispetto all'asse X del sistema di riferimento globale.

• **VERIFICHE**

Le verifiche, svolte secondo il metodo degli stati limite ultimi e di esercizio, si ottengono involupando tutte le condizioni di carico prese in considerazione.

In fase di verifica è stato differenziato l'elemento trave dall'elemento pilastro. Nell'elemento trave le armature sono disposte in modo asimmetrico, mentre nei pilastri sono sempre disposte simmetricamente.

Per l'elemento trave, l'armatura si determina suddividendola in cinque conci in cui l'armatura si mantiene costante, valutando per tali conci le massime aree di armatura superiore ed inferiore richieste in base ai momenti massimi riscontrati nelle varie combinazioni di carico esaminate. Lo stesso criterio è stato adottato per il calcolo delle staffe.

Anche l'elemento pilastro viene scomposto in cinque conci in cui l'armatura si mantiene costante. Vengono però riportate le armature massime richieste nella metà superiore (testa) e inferiore (piede).

La fondazione su travi rovesce è risolta contemporaneamente alla sovrastruttura tenendo in conto sia la rigidezza flettente che quella torcente, utilizzando per l'analisi agli elementi finiti l'elemento asta su suolo elastico alla *Winkler*.

Le travate possono incrociarsi con angoli qualsiasi e avere dei disassamenti rispetto ai pilastri su cui si appoggiano.

La ripartizione dei carichi, data la natura matriciale del calcolo, tiene automaticamente conto della rigidezza relativa delle varie travate convergenti su ogni nodo.

Le verifiche per gli elementi bidimensionali (setti) vengono effettuate sovrapponendo lo stato tensionale del comportamento a lastra e di quello a piastra. Vengono calcolate le armature delle due facce dell'elemento bidimensionale disponendo i ferri in due direzioni ortogonali.

• **VERIFICA DEL QUANTITATIVO MINIMO DI ARMATURA.**

La verifica delle armature deve soddisfare i minimi di legge di seguito riportati:

TRAVI:

1. Area minima delle staffe pari a  $1.5 \cdot b$  mmq/ml, essendo b lo spessore minimo dell'anima misurato in mm, con passo non maggiore di 0,8 dell'altezza utile e con un minimo di 3 staffe al metro. In prossimità degli appoggi o di

---

Dott. Ing. Carlo Cesaroni, Via San Giuseppe n. 5, 63066 Grottammare (AP)

Tel/Fax: 0735500557 – mobile: 3358121816 – e-mail: carlo-cesaroni@libero.it – posta certificata: carlo.cesaroni2@ingpec.eu

---

carichi concentrati per una lunghezza pari all'altezza utile della sezione, il passo minimo sarà 12 volte il diametro minimo dell'armatura longitudinale.

2. Armatura longitudinale in zona tesa  $\geq 0,15\%$  della sezione di calcestruzzo. Alle estremità è disposta una armatura inferiore minima che possa assorbire, allo stato limite ultimo, uno sforzo di trazione uguale al taglio.
3. In zona sismica, nelle zone critiche il passo staffe è non superiore al minimo di:
  - un quarto dell'altezza utile della sezione trasversale;
  - 175 mm e 225 mm, rispettivamente per CDA e CDB;
  - 6 volte e 8 volte il diametro minimo delle barre longitudinali considerate ai fini delle verifiche, rispettivamente per CDA e CDB;
  - 24 volte il diametro delle armature trasversali.

Le zone critiche si estendono, per CDB e CDA, per una lunghezza pari rispettivamente a 1 e 1,5 volte l'altezza della sezione della trave, misurata a partire dalla faccia del nodo trave-pilastro. Nelle zone critiche della trave il rapporto fra l'armatura compressa e quella tesa è maggiore o uguale a 0,5.

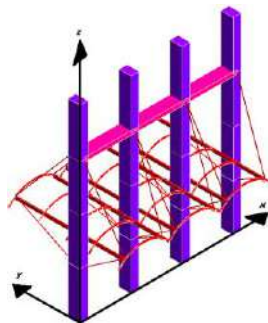
#### PILASTRI:

1. Armatura longitudinale compresa fra 0,3% e 4% della sezione effettiva e non minore di  $0,10 \cdot N_{ed}/f_{yd}$ ;
2. Barre longitudinali con diametro  $\geq 12$  mm;
3. Diametro staffe  $\geq 6$  mm e comunque  $\geq 1/4$  del diametro max delle barre longitudinali, con interasse non maggiore di 30 cm.
4. In zona sismica l'armatura longitudinale è almeno pari all'1% della sezione effettiva; il passo delle staffe di contenimento è non superiore alla più piccola delle quantità seguenti:
  - $1/3$  e  $1/2$  del lato minore della sezione trasversale, rispettivamente per CDA e CDB;
  - 125 mm e 175 mm, rispettivamente per CDA e CDB;
  - 6 e 8 volte il diametro delle barre longitudinali che collegano, rispettivamente per CDA e CDB.

### • SISTEMI DI RIFERIMENTO

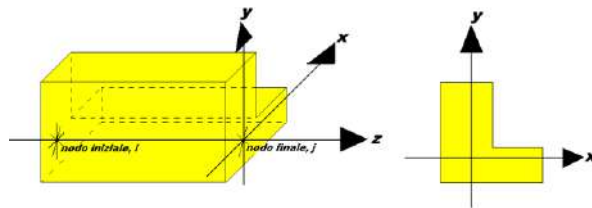
#### 1) SISTEMA GLOBALE DELLA STRUTTURA SPAZIALE

Il sistema di riferimento globale è costituito da una terna destra di assi cartesiani ortogonali (O-XYZ) dove l'asse Z rappresenta l'asse verticale rivolto verso l'alto. Le rotazioni sono considerate positive se concordi con gli assi vettori:



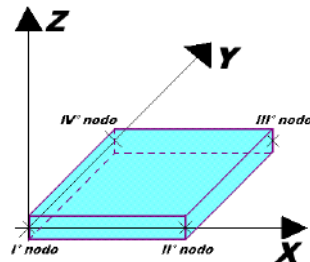
#### 2) SISTEMA LOCALE DELLE ASTE

Il sistema di riferimento locale delle aste, inclinate o meno, è costituito da una terna destra di assi cartesiani ortogonali che ha l'asse Z coincidente con l'asse longitudinale dell'asta ed orientamento dal nodo iniziale al nodo finale, gli assi X ed Y sono orientati come nell'archivio delle sezioni:



### 3) SISTEMA LOCALE DELL'ELEMENTO SHELL

Il sistema di riferimento locale dell'elemento shell è costituito da una terna destra di assi cartesiani ortogonali che ha l'asse X coincidente con la direzione fra il primo ed il secondo nodo di input, l'asse Y giacente nel piano dello shell e l'asse Z in direzione dello spessore:



#### • UNITÀ DI MISURA

Si adottano le seguenti unità di misura:

[lunghezze]	= m
[forze]	= kgf / daN
[tempo]	= sec
[temperatura]	= °C

#### • CONVENZIONI SUI SEGNI

I carichi agenti sono:

- 1) Carichi e momenti distribuiti lungo gli assi coordinati;
- 2) Forze e coppie nodali concentrate sui nodi.

Le forze distribuite sono da ritenersi positive se concordi con il sistema di riferimento locale dell'asta, quelle concentrate sono positive se concordi con il sistema di riferimento globale.

I gradi di libertà nodali sono gli omologhi agli enti forza, e quindi sono definiti positivi se concordi a questi ultimi.

#### • VERIFICA ESTESA STATICA ELEMENTI IN MURATURA

La verifica per le azioni statiche sugli elementi murari è stata effettuata secondo le modalità di seguito riassunte.

##### a) CALCOLO DELLE ECCENTRICITÀ

*Eccentricità accidentale trasversale:*

$$e_a = h / 200$$

dove con **h** si è indicata l'altezza complessiva del muro. Tale valore di eccentricità si utilizza per intero nella sezione di testa, per metà in quella di mezz'opera e si annulla nella sezione al piede.

*Eccentricità strutturale trasversale:*

$$e_s = M / N$$

essendo:

**M** = momento flettente complessivo dovuto alle azioni di calcolo, tra cui l'eccentricità della risultante del carico del solaio, la pressione orizzontale dovuta all'azione del vento o del terrapieno, l'eccentricità di posizionamento del muro sovrastante e l'effetto di azioni orizzontali spingenti.

**N** = sforzo normale complessivo agente sulla sezione da verificare.

*Eccentricità strutturale longitudinale:*

$$e_b = M_b / N$$

essendo:

**M<sub>b</sub>** = momento flettente complessivo dovuto alle azioni di calcolo, tra cui l'eccentricità della risultante del carico del solaio, la pressione orizzontale dovuta all'azione del vento o del terrapieno, l'eccentricità di posizionamento del muro sovrastante e l'effetto di azioni orizzontali spingenti lungo la direzione del muro.

**N** = sforzo normale complessivo agente sulla sezione da verificare.

*Eccentricità trasversale di calcolo:*

$$e = |e_s| + |e_a|$$

In ogni caso il valore dell'eccentricità trasversale di calcolo per ciascuna sezione di verifica non può essere inferiore ad **h** / 200 o superiore a 1/3 dello spessore del muro. Nel primo caso questa si porrà comunque pari ad **h** / 200; nel secondo caso la verifica si riterrà non soddisfatta.

**b) CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI ECCENTRICITÀ**

Si calcola il seguente coefficiente:

$$m = 6 \cdot e / t$$

essendo **t** lo spessore del muro, nel caso di eccentricità trasversale, o la lunghezza, nel caso di eccentricità longitudinale.

**c) CALCOLO DELLA SNELLEZZA DELLA PARETE**

$$l = (\alpha \cdot h) / t$$

Essendo **α** il fattore laterale di vincolo, posto in questo calcolo sempre pari ad 1.

**d) CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI RIDUZIONE**

Il calcolo dei coefficienti **F<sub>i</sub>**, in funzione di **m** e **l**, viene effettuato per doppia interpolazione con la seguente tabella:

<b>l</b>	Coefficiente di eccentricità <b>m = 6*e / t</b>				
	0	0,5	1,0	1,5	2,0

0	1,00	0,74	0,59	0,44	0,33
5	0,97	0,71	0,55	0,39	0,27
10	0,86	0,61	0,45	0,27	0,15
15	0,69	0,48	0,32	0,17	-
20	0,53	0,36	0,23	-	-

In nessuna caso è ammessa l'estrapolazione di tale tabella. Quindi per valori di snellezza ed eccentricità per i quali non è ricavabile un valore di  $F_i$ , la verifica si riterrà non soddisfatta. In caso di eccentricità longitudinale si pone  $l$  pari a 0.

#### e) VERIFICA

La verifica verrà effettuata utilizzando il metodo agli stati limite ultimi. La condizione che soddisfa la verifica della sezione sarà la seguente:

$$s = N / (F_i - F_b A) \leq f_d$$

essendo:

$N$  = sforzo normale complessivo agente nella sezione;

$F_i$  = coefficiente di parzializzazione trasversale per la sezione i-esima (testa, mezzeria o piede);

$F_b$  = coefficiente di parzializzazione longitudinale per la sezione di piede (pari ad 1 per le altre sezioni);

$A$  = area della sezione;

$f_d$  = resistenza di calcolo della muratura.

#### • VERIFICA ELEMENTI IN MURATURA PER SISMA ORTOGONALE

Viene svolta la verifica per ciascun muro anche per le azioni generate dalla componente dell'azione sismica ortogonale al piano del muro. In conseguenza di ciò si generano una pressione distribuita lungo tutta la superficie del muro, dovuta al suo peso proprio, e delle eventuali azioni concentrate dovute a masse che gravano sul muro nei punti ove esso non risulti efficacemente vincolato a un impalcato rigido.

A prescindere dalle direzioni di ingresso del sisma selezionate per la struttura, ciascuna verifica locale dei muri viene svolta considerando il sisma agente proprio nella direzione ortogonale al muro di volta in volta esaminato. Le sollecitazioni derivanti da tali azioni verranno ricavate anche in base all'analisi complessiva della struttura, tenendo quindi conto della posizione mutua tra i muri, della disposizione degli impalcati rigidi e della eventuale presenza di cordoli e tiranti.

Il calcolo della pressione e delle forze orizzontali è svolto in ottemperanza ai punti 7.2.3 e 7.8.2.2.3

La distribuzione delle sollecitazioni è calcolata seguendo un andamento proporzionale alla situazione di collasso cinematico in cui si formano tre cerniere allineate in verticale sul singolo paramento.

La verifica è svolta confrontando la coppia di sollecitazioni  $M$  e  $N$  di calcolo con quelle che garantiscono l'equilibrio nella situazione limite a rottura, con sezione parzializzata e sigma di compressione uniforme nel tratto reagente pari a  $0,85 F_d$ . La verifica a taglio è svolta invece confrontando la tensione tangenziale media della sezione con quella limite del materiale incrementata per un valore pari a  $0,4 N$ .

#### • VERIFICA ELEMENTI IN MURATURA PER SISMA PARALLELO

Viene svolta la verifica per ciascun muro per le azioni ottenute mediante l'analisi sismica globale combinate con le azioni verticali e tenendo in conto la contemporaneità dei due sismi ortogonali come previsto dalla norma.

Le verifiche verranno condotte sia agli SLV che agli SLD utilizzando gli spettri del punto 3.2.1, le azioni sismiche verranno combinate come previsto al punto 3.2.4



L'analisi sismica potrà essere di tipo statica equivalente o dinamica modale utilizzando lo spettro di progetto ridotto tramite il fattore di comportamento definito per le strutture in muratura nella Tab. 7.3.II

Il modello di calcolo sarà costituito da elementi verticali continui e da fasce di piano schematizzate come elementi travi, per il calcolo delle rigidezze si farà riferimento ai valori fessurati pari al 50% della rigidezza della sezione integra.

Le fasce di piano saranno considerate incernierate ai maschi murari se non presenti elementi capaci di resistere a trazione quali tiranti e catene. Le pareti verticali saranno verificate a flessione ed a taglio utilizzando per il calcolo dei valori resistenti le formule previste nel paragrafo 7.8.2.2.

L'analisi PUSH over sarà effettuata per gli stati limite SLO (se richiesto) SLD ed SLV come previsto dalla Circolare 21 gennaio 2019 al capitolo C8.7.1 e C8.7.1.3.1

Le verifiche delle strutture in muratura esistenti sono effettuate tenendo in conto i parametri deformativi, i meccanismi a flessione ed a taglio previsti al punto C8.7.1.3.1.1 della circolare Circolare 21 gennaio 2019

Per il calcolo dei valori resistenti del materiale delle murature esistenti si terrà conto del fattore di confidenza e dei valori tabellati come previsto al punto C8.5.3.1 della Circolare 21 gennaio 2019, sia per quanto riguarda le verifiche sismiche che quelle statiche.

### • VERIFICA MECCANISMI LOCALI DI COLLASSO PER LA MURATURA

La verifica è effettuata in base al punto 8.7.1, secondo le direttive previste dalla *Circolare 21 gennaio 2019* al capitolo C8.7.1.2e le indicazioni presenti nelle *"Schede illustrative dei principali meccanismi di collasso locali negli edifici esistenti in muratura e dei relativi modelli cinematici di analisi"*, curate dalla *Protezione Civile* e dalla *Reluiss*.

Il calcolo è effettuato utilizzando l'analisi cinematica lineare (semplificata) con fattore  $q$  pari a 2, per lo stato limite di salvaguardia della vita. La verifica consiste nel verificare che l'accelerazione spettrale di attivazione  $a_0^*$  soddisfi ciascuna delle seguenti disequazioni:

$$a_0^* \geq a_g(P_{VR}) S / q$$

$$a_0^* \geq S_e(T_1) g (Z / H) / q$$

dove:

$a_g$  = accelerazione sismica al suolo, funzione di  $P_{VR}$ , cioè della probabilità  $P$  di superamento dello stato limite di salvaguardia della vita (pari al 10%) e della vita di riferimento  $VR$  della struttura come definiti punto 3.2

$S$  = prodotto del coefficiente di amplificazione stratigrafica e del coefficiente di amplificazione topografica, come definiti al punto 3.2.3.2.1

$q$  = il fattore di struttura, che si è posto pari a 2;

$S_e$  = spettro elastico, come definito al punto 3.2.3.2.1, funzione del periodo  $T_1$ , relativo al primo modo di vibrare della struttura;

$Z / H$  = approssima la forma del primo modo di vibrare della struttura normalizzato a 1 in sommità, essendo  $H$  l'altezza complessiva dell'edificio e  $Z$  l'altezza del punto più basso della porzione di muratura interessata dal meccanismo, entrambe misurate a partire dalla quota di fondazione dell'edificio;

$g$  = coefficiente di partecipazione modale, che viene approssimato con l'espressione  $g = 3 N / (2 N + 1)$ , essendo  $N$  il numero di piani dell'edificio;

L'accelerazione spettrale di attivazione è data dalla seguente formula:

$$a_0^* = a_0 g / (e^* FC)$$

essendo:

$a_0$  = moltiplicatore dell'azione sismica che causa il collasso del meccanismo, ricavato applicando il principio dei lavori virtuali;

$g$  = accelerazione di gravità;

$e^*$  = frazione di massa partecipante, come definita al punto C8.7.1.2.1.3 della *Circolare 2019*;

**FC** = fattore di confidenza (nel caso in cui per la valutazione del moltiplicatore **a<sub>0</sub>** non si tenga conto della resistenza a compressione della muratura, con conseguente arretramento della linea ideale del ribaltamento, il fattore di confidenza sarà comunque posto pari a quello relativo al livello di conoscenza **LC1**).

Si tiene conto della presenza di eventuali tiranti o comunque altra tipologia di elementi facenti parte della struttura nel suo complesso in grado di creare una azione di tipo stabilizzante, così come si prende in considerazione l'effetto instabilizzante di carichi spingenti dovuti a volte o altre tipologie di carico che abbiano tale effetto.

In caso di muratura a doppia cortina si considera che il ribaltamento possa avvenire per le due porzioni di muratura, quella esterna e quella interna, in modo indipendente.

In presenza di cordolature di testa non adeguatamente ammortate alla muratura sottostante, non si tiene in alcun conto a fini stabilizzanti dell'effetto dovuto all'attrito tra cordolo e muratura, dal momento che in presenza di azione sismica l'effetto di tale attrito potrebbe essere aleatorio a causa delle azioni sussultorie.

In caso di meccanismo della tipologia di flessione orizzontale in cui si tiene conto di un effetto di confinamento, alle azioni agenti sugli elementi facenti parte del meccanismo si aggiunge un effetto stabilizzante dato ad una doppia coppia di forze, agenti con asse vettore verticale. Per ciascuna coppia la forza è assegnata pari alla tensione **0,85 F<sub>d</sub>**, intesa come agente su metà dello spessore del muro e per un'altezza pari alla linea di frattura interessata dal meccanismo. Il braccio della coppia invece sarà assunto pari alla metà dello spessore del muro stesso.

L'effetto del confinamento può essere garantito dalla presenza di corpi di fabbrica adiacenti alla zona interessata al meccanismo o da una apposita tirantatura disposta allo scopo parallelamente alla muratura e opportunamente ancorata, in grado di impedire spostamenti orizzontali delle imposte a partire dalle quali si innesca il meccanismo di flessione fuori piano, ingenerando così una specie di effetto arco interno alla muratura, che viene schematizzato, come appena esposto, in forma di arco a tre cerniere, considerando il centro di ciascuna cerniera nel semi-spessore di muro compresso in condizioni di limite per la resistenza alla compressione.

#### • MISURA DELLA SICUREZZA

Il metodo di verifica della sicurezza adottato è quello degli Stati Limite (SL) che prevede due insiemi di verifiche rispettivamente per gli stati limite ultimi S.L.U. e gli stati limite di esercizio S.L.E..

La sicurezza viene quindi garantita progettando i vari elementi resistenti in modo da assicurare che la loro resistenza di calcolo sia sempre maggiore delle corrispondente domanda in termini di azioni di calcolo.

Le norme precisano che la sicurezza e le prestazioni di una struttura o di una parte di essa devono essere valutate in relazione all'insieme degli stati limite che verosimilmente si possono verificare durante la vita normale.

Prescrivono inoltre che debba essere assicurata una robustezza nei confronti di azioni eccezionali.

Le prestazioni della struttura e la vita nominale sono riportati nei successivi tabulati di calcolo della struttura.

La sicurezza e le prestazioni saranno garantite verificando gli opportuni stati limite definiti di concerto al Committente in funzione dell'utilizzo della struttura, della sua vita nominale e di quanto stabilito dalle norme di cui al D.M. 17/01/2018 e successive modifiche ed integrazioni.

In particolare si è verificata:

- la sicurezza nei riguardi degli stati limite ultimi (S.L.U.) che possono provocare eccessive deformazioni permanenti, crolli parziali o globali, dissesti, che possono compromettere l'incolumità delle persone e/o la perdita di beni, provocare danni ambientali e sociali, mettere fuori servizio l'opera. Per le verifiche sono stati utilizzati i coefficienti parziali relativi alle azioni ed alle resistenze dei materiali in accordo a quanto previsto dal D.M. 17/01/2018 per i vari tipi di materiale. I valori utilizzati sono riportati nel fascicolo delle elaborazioni numeriche allegate;

la sicurezza nei riguardi degli stati limite di esercizio (S.L.E.) che possono limitare nell'uso e nella durata l'utilizzo della struttura per le azioni di esercizio. In particolare di concerto con il committente e coerentemente alle norme tecniche si sono definiti i limiti riportati nell'allegato fascicolo delle calcolazioni;

la sicurezza nei riguardi dello stato limite del danno (S.L.D.) causato da azioni sismiche con opportuni periodi di ritorno definiti di concerto al committente ed alle norme vigenti per le costruzioni in zona sismica;

robustezza nei confronti di opportune azioni accidentali in modo da evitare danni sproporzionati in caso di incendi, urti, esplosioni, errori umani;

Per quando riguarda le fasi costruttive intermedie la struttura non risulta cimentata in maniera più gravosa della fase finale.

## • MODELLI DI CALCOLO

Si sono utilizzati come modelli di calcolo quelli esplicitamente richiamati nel D.M. 17/01/2018.

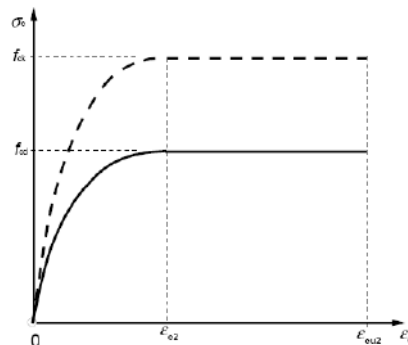
Per quanto riguarda le azioni sismiche ed in particolare per la determinazione del fattore di struttura, dei dettagli costruttivi e le prestazioni sia agli S.L.U. che allo S.L.D. si fa riferimento al D.M. 17/01/18 e alla *Circolare del Ministero Infrastrutture e Trasporti* del 21 Gennaio 2019 n. 7 C.S.LL.PP. la quale è stata utilizzata come norma di dettaglio.

La definizione quantitativa delle prestazioni e le verifiche sono riportati nel fascicolo delle elaborazioni numeriche allegate.

Il modello di calcolo utilizzato risulta rappresentativo della realtà fisica per la configurazione finale anche in funzione delle modalità e sequenze costruttive.

Per le verifiche sezionali i legami utilizzati sono mostrati di seguito.

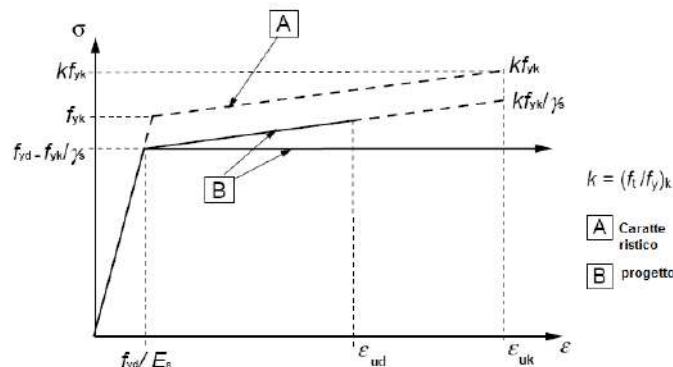
### • LEGAME COSTITUTIVO PER IL CALCESTRUZZO



**Legame costitutivo di progetto parabola-rettangolo per il calcestruzzo.**

Il valore  $\epsilon_{cu2}$  nel caso di analisi non lineari sarà valutato in funzione dell'effettivo grado di confinamento esercitato dalle staffe sul nucleo di calcestruzzo.

### • LEGAME RIGIDO PLASTICO PER LE SEZIONI IN ACCIAIO DI CLASSE 1 E 2, LEGAME ELASTICO LINEARE PER LE SEZIONI IN ACCIAIO DI CLASSE 3 E 4;



**Legame costitutivo di progetto elastico perfettamente plastico o incrudente a duttilità limitata per l'acciaio.**

**AZIONI SULLA COSTRUZIONE**

**AZIONI AMBIENTALI E NATURALI**

Si è concordato con il committente che le prestazioni attese nei confronti delle azioni sismiche siano verificate agli stati limite, sia di esercizio che ultimi individuati riferendosi alle prestazioni della costruzione nel suo complesso, includendo gli elementi strutturali, quelli non strutturali e gli impianti.

Gli stati limite di esercizio sono:

- Stato Limite di Operatività (S.L.O.)
- Stato Limite di Danno (S.L.D.)

Gli stati limite ultimi sono:

- Stato Limite di salvaguardia della Vita (S.L.V.)
- Stato Limite di prevenzione del Collasso (S.L.C.)

Le probabilità di superamento nel periodo di riferimento PVR, cui riferirsi per individuare l'azione sismica agente in ciascuno degli stati limite considerati, sono riportate nella successiva tabella:

Stati Limite PVR :		Probabilità di superamento nel periodo di riferimento VR
Stati limite di esercizio	SLO	81%
	SLD	63%
Stati limite ultimi	SLV	10%
	SLC	5%

Per la definizione delle forme spettrali (spettri elastici e spettri di progetto), in conformità ai dettami del D.M. 17/01/2018 § 3.2.3. sono stati definiti i seguenti termini:

- Vita Nominale del fabbricato;
- Classe d'Uso del fabbricato;
- Categoria del Suolo;
- Coefficiente Topografico;
- Latitudine e Longitudine del sito oggetto di edificazione.

Si è inoltre concordato che le verifiche delle prestazioni saranno effettuate per le azioni derivanti dalla neve, dal vento e dalla temperatura secondo quanto previsto dal cap. 3 del D.M. 17/01/18 e della Circolare del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti del 21 Gennaio 2019 n. 7 C.S.LL.PP. per un periodo di ritorno coerente alla classe della struttura ed alla sua vita utile.

**DESTINAZIONE D'USO E SOVRACCARICHI PER LE AZIONI ANTROPICHE**

Per la determinazione dell'entità e della distribuzione spaziale e temporale dei sovraccarichi variabili si farà riferimento alla tabella del D.M. 17/01/2018 in funzione della destinazione d'uso.

I carichi variabili comprendono i carichi legati alla destinazione d'uso dell'opera; i modelli di tali azioni possono essere costituiti da:

- carichi verticali uniformemente distribuiti  $q_k$  [kN/m<sup>2</sup>]
- carichi verticali concentrati  $Q_k$  [kN]
- carichi orizzontali lineari  $H_k$  [kN/m]

**Tabella 3.1.II** – Valori dei carichi d'esercizio per le diverse categorie di edifici

Categ.	Ambienti	$q_k$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$Q_k$ [kN]	$H_k$ [kN/m]
A	Ambienti ad uso residenziale			
	Aree per attività domestiche e residenziali; sono compresi in questa categoria i locali di abitazione e relativi servizi, gli alberghi (ad esclusione delle aree soggette ad affollamento), camere di degenza di ospedali	2,00	2,00	1,00
	Scale comuni, balconi, ballatoi	4,00	4,00	2,00
B	Uffici			
	Cat. B1 – Uffici non aperti al pubblico	2,00	2,00	1,00
	Cat. B2 – Uffici aperti al pubblico	3,00	2,00	1,00
	Scale comuni, balconi, ballatoi	4,00	4,00	2,00
C	Ambienti suscettibili di affollamento			

Dott. Ing. Carlo Cesaroni, Via San Giuseppe n. 5, 63066 Grottammare (AP)

Tel/Fax: 0735500557 – mobile: 3358121816 – e-mail: carlo-cesaroni@libero.it – posta certificata: carlo.cesaroni2@ingpec.eu

	Cat. C1 Aree con tavoli, quali scuole, caffè, ristoranti, sale per banchetti, lettura e ricevimento Cat. C2 Aree con posti a sedere fissi, quali chiese, teatri, cinema, sale per conferenze e attesa, aule universitarie e aule magne Cat. C3 Ambienti privi di ostacoli al movimento delle persone, quali musei, sale per esposizioni, aree d'accesso a uffici, ad alberghi e ospedali, ad atri di stazioni ferroviarie Cat. C4. Aree con possibile svolgimento di attività fisiche, quali sale da ballo, palestre, palcoscenici Cat. C5. Aree suscettibili di grandi affollamenti, quali edifici per eventi pubblici, sale da concerto, palazzetti per lo sport e relative tribune, gradinate e piattaforme ferroviarie	3,00	3,00	1,00
		4,00	4,00	2,00
		5,00	5,00	3,00
		5,00	5,00	3,00
		5,00	5,00	3,00
	Scale comuni, balconi, ballatoi	Secondo categoria d'uso servita, con le seguenti limitazioni		
		≥4,00	≥4,00	≥2,00
D	Ambienti ad uso commerciale			
	Cat. D1 Negozi	4,00	4,00	2,00
	Cat. D2 Centri commerciali, mercati, grandi magazzini	5,00	5,00	2,00
	Scale comuni, balconi, ballatoi	Secondo categoria d'uso servita		
E	<b>Aree per immagazzinamento e uso commerciale ed uso industriale</b>			
	Cat. E1 Aree per accumulo di merci e relative aree d'accesso, quali biblioteche, archivi, magazzini, depositi, laboratori manifatturieri	≥ 6,00	7,00	1,00*
	Cat. E2 Ambienti ad uso industriale	da valutarsi caso per caso		
F – G	<b>Rimesse e aree per traffico di veicoli (esclusi i ponti)</b>			
	Cat. F Rimesse, aree per traffico, parcheggio e sosta di veicoli leggeri (peso a pieno carico fino a 30 kN)	2,50	2 x 10,00	1,00**
	Cat. G Aree per traffico e parcheggio di veicoli medi (peso a pieno carico compreso fra 30 kN e 160 kN), quali rampe d'accesso, zone di carico e scarico merci	da valutarsi caso per caso e comunque non minori di		
		5,00	2 x 50,00	1,00**
H-I-K	Coperture			
	Cat. H Coperture accessibili per sola manutenzione e riparazione	0,50	1,20	1,00
	Cat. I Coperture praticabili di ambienti di categoria d'uso compresa fra A e D	secondo categoria di appartenenza		
	Cat. K Coperture per usi speciali, quali impianti, eliporti	da valutarsi caso per caso		

\* non comprende le azioni orizzontali eventualmente esercitate dai materiali immagazzinati.

\*\* per i soli parapetti o partizioni nelle zone pedonali. Le azioni sulle barriere esercitate dagli automezzi dovranno essere valutate caso per caso

I valori nominali e/o caratteristici  $q_k$ ,  $Q_k$  ed  $H_k$  di riferimento sono riportati nella Tab. 3.1.II. delle N.T.C. 2018. In presenza di carichi verticali concentrati  $Q_k$  essi sono stati applicati su impronte di carico appropriate all'utilizzo ed alla forma dello orizzontamento.

In particolare si considera una forma dell'impronta di carico quadrata pari a 50 x 50 mm, salvo che per le rimesse ed i parcheggi, per i quali i carichi si sono applicano su due impronte di 200 x 200 mm, distanti assialmente di 1,80 m.

## AZIONE SISMICA

Ai fini delle N.T.C. 2018 l'azione sismica è caratterizzata da 3 componenti traslazionali, due orizzontali contrassegnate da X ed Y ed una verticale contrassegnata da Z, da considerare tra di loro indipendenti.

Le componenti possono essere descritte, in funzione del tipo di analisi adottata, mediante una delle seguenti rappresentazioni:

- accelerazione massima attesa in superficie;
- accelerazione massima e relativo spettro di risposta attesi in superficie;
- accelerogramma.

l'azione in superficie è stata assunta come agente su tali piani.

Le due componenti ortogonali indipendenti che descrivono il moto orizzontale sono caratterizzate dallo stesso spettro di risposta. L'accelerazione massima e lo spettro di risposta della componente verticale attesa in superficie sono determinati sulla base dell'accelerazione massima e dello spettro di risposta delle due componenti orizzontali.

In allegato alle N.T.C. 2018, per tutti i siti considerati, sono forniti i valori dei precedenti parametri di pericolosità sismica necessari per la determinazione delle azioni sismiche.

## AZIONI DOVUTE AL VENTO

Le azioni del vento sono state determinate in conformità al §3.3 del D.M. 17/01/18 e della *Circolare del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti* del 21 Gennaio 2019 n. 7 C.S.LL.PP. Si precisa che tali azioni hanno valenza significativa in caso di strutture di elevata snellezza e con determinate caratteristiche tipologiche come ad esempio le strutture in acciaio.

## AZIONI DOVUTE ALLA TEMPERATURA

E' stato tenuto conto delle variazioni giornaliere e stagionali della temperatura esterna, irraggiamento solare e convezione comportano variazioni della distribuzione di temperatura nei singoli elementi strutturali, con un delta di temperatura di 15° C. Nel calcolo delle azioni termiche, si è tenuto conto di più fattori, quali le condizioni climatiche del sito, l'esposizione, la massa complessiva della struttura, la eventuale presenza di elementi non strutturali isolanti, le temperature dell'aria esterne (Cfr. § 3.5.2), dell'aria interna (Cfr. § 3.5.3) e la distribuzione della temperatura negli elementi strutturali (Cfr. § 3.5.4) viene assunta in conformità ai dettami delle N.T.C. 2018.

## NEVE

Il carico provocato dalla neve sulle coperture, ove presente, è stato valutato mediante la seguente espressione di normativa:

$$q_s = \mu_i \cdot q_{sk} \cdot C_E \cdot C_t \quad (\text{Cfr. §3.3.7})$$

in cui si ha:

$q_s$  = carico neve sulla copertura;

$\mu_i$  = coefficiente di forma della copertura, fornito al (Cfr. § 3.4.5);

$q_{sk}$  = valore caratteristico di riferimento del carico neve al suolo [kN/m<sup>2</sup>], fornito al (Cfr. § 3.4.2) delle N.T.C. 2018

per un periodo di ritorno di 50 anni;

$C_E$  = coefficiente di esposizione di cui al (Cfr. § 3.4.3);

$C_t$  = coefficiente termico di cui al (Cfr. § 3.4.4).

## AZIONI ANTROPICHE E PESI PROPRI

Nel caso delle spinte del terrapieno sulle pareti di cantinato (ove questo fosse presente), in sede di valutazione di tali carichi, (a condizione che non ci sia grossa variabilità dei parametri geotecnici dei vari strati così come individuati nella relazione geologica), è stata adottata una sola tipologia di terreno ai soli fini della definizione dei lati di spinta e/o di eventuali sovraccarichi.

### • COMBINAZIONI DI CALCOLO

Le combinazioni di calcolo considerate sono quelle previste dal D.M. 17/01/2018 per i vari stati limite e per le varie azioni e tipologie costruttive.

In particolare, ai fini delle verifiche degli stati limite si definiscono le seguenti combinazioni delle azioni per cui si rimanda al § 2.5.3 delle N.T.C. 2018. Queste sono:

- Combinazione fondamentale, generalmente impiegata per gli stati limite ultimi (S.L.U.) (2.5.1);
- Combinazione caratteristica (rara), generalmente impiegata per gli stati limite di esercizio (S.L.E.) irreversibili, da utilizzarsi nelle verifiche alle tensioni ammissibili di cui al § 2.7 (2.5.2);
- Combinazione frequente, generalmente impiegata per gli stati limite di esercizio (S.L.E.) reversibili (2.5.3);
- Combinazione quasi permanente (S.L.E.), generalmente impiegata per gli effetti a lungo termine (2.5.4);
- Combinazione sismica, impiegata per gli stati limite ultimi e di esercizio connessi all'azione sismica E (v. § 3.2 form. 2.5.5);
- Combinazione eccezionale, impiegata per gli stati limite ultimi connessi alle azioni eccezionali di progetto Ad (v. § 3.6 form. 2.5.6).

Nelle combinazioni per S.L.E., si intende che vengono omissi i carichi  $Q_{kj}$  che danno un contributo favorevole ai fini delle verifiche e, se del caso, i carichi  $G_2$ .

Altre combinazioni sono da considerare in funzione di specifici aspetti (p. es. fatica, ecc.). Nelle formule sopra riportate il simbolo + vuol dire "combinato con".

I valori dei coefficienti parziali di sicurezza  $\gamma_{Gi}$  e  $\gamma_{Qj}$  sono dati in § 2.6.1, Tab. 2.6.I.

Nel caso delle costruzioni civili e industriali le verifiche agli stati limite ultimi o di esercizio devono essere effettuate per la combinazione dell'azione sismica con le altre azioni già fornita in § 2.5.3 form. 3.2.16 delle N.T.C. 2018.

Gli effetti dell'azione sismica saranno valutati tenendo conto delle masse associate ai carichi gravitazionali (form. 3.2.17).

I valori dei coefficienti  $\psi_{2j}$  sono riportati nella Tabella 2.5.I..

La struttura deve essere progettata così che il degrado nel corso della sua vita nominale, purché si adotti la normale manutenzione ordinaria, non pregiudichi le sue prestazioni in termini di resistenza, stabilità e funzionalità, portandole al di sotto del livello richiesto dalle presenti norme.

Le misure di protezione contro l'eccessivo degrado devono essere stabilite con riferimento alle previste condizioni ambientali.

La protezione contro l'eccessivo degrado deve essere ottenuta attraverso un'opportuna scelta dei dettagli, dei materiali e delle dimensioni strutturali, con l'eventuale applicazione di sostanze o ricoprimenti protettivi, nonché con l'adozione di altre misure di protezione attiva o passiva.

La definizione quantitativa delle prestazioni e le verifiche sono riportati nel fascicolo delle elaborazioni numeriche allegate.

## • COMBINAZIONI DELLE AZIONI SULLA COSTRUZIONE

Le azioni definite come al § 2.5.1 delle N.T.C. 2018 sono state combinate in accordo a quanto definito al § 2.5.3. applicando i coefficienti di combinazione come di seguito definiti:

<b>Categoria/Azione variabile</b>	<b><math>\psi_{0j}</math></b>	<b><math>\psi_{1j}</math></b>	<b><math>\psi_{2j}</math></b>
Categoria A Ambienti ad uso residenziale	0,7	0,5	0,3
Categoria B Uffici	0,7	0,5	0,3
Categoria C Ambienti suscettibili di affollamento	0,7	0,7	0,6
Categoria D Ambienti ad uso commerciale	0,7	0,7	0,6
Categoria E Biblioteche, archivi, magazzini e ambienti ad uso industriale	1,0	0,9	0,8
Categoria F Rimesse e parcheggi (per autoveicoli di peso $\leq 30$ kN)	0,7	0,7	0,6
Categoria G Rimesse e parcheggi (per autoveicoli di peso $> 30$ kN)	0,7	0,5	0,3
Categoria H Coperture	0,0	0,0	0,0
Vento	0,6	0,2	0,0
Neve (a quota $\leq 1000$ m s.l.m.)	0,5	0,2	0,0
Neve (a quota $> 1000$ m s.l.m.)	0,7	0,5	0,2
Variazioni termiche	0,6	0,5	0,0

Tabella 2.5.I – Valori dei coefficienti di combinazione

I valori dei coefficienti parziali di sicurezza  $\gamma_{Gi}$  e  $\gamma_{Qj}$  utilizzati nelle calcolazioni sono dati nelle N.T.C. 2018 in § 2.6.1, Tab. 2.6.I.

## • TOLLERANZE

Nelle calcolazioni si è fatto riferimento ai valori nominali delle grandezze geometriche ipotizzando che le tolleranze ammesse in fase di realizzazione siano conformi alle euronorme EN 1992-1991- EN206 - EN 1992-2005:

- Copriferro  $-5$  mm (EC2 4.4.1.3)
- Per dimensioni  $\leq 150$  mm  $\pm 5$  mm
- Per dimensioni  $\leq 400$  mm  $\pm 15$  mm
- Per dimensioni  $\geq 2500$  mm  $\pm 30$  mm

Per i valori intermedi interpolare linearmente.

## • DURABILITÀ

Per garantire la durabilità della struttura sono state prese in considerazione opportuni stati limite di esercizio (S.L.E.) in funzione dell'uso e dell'ambiente in cui la struttura dovrà vivere limitando sia gli stati tensionali che nel caso delle opere in calcestruzzo anche l'ampiezza delle fessure. La definizione quantitativa delle prestazioni, la classe di esposizione e le verifiche sono riportati

nel fascicolo delle elaborazioni numeriche allegate.

Inoltre per garantire la durabilità, così come tutte le prestazioni attese, è necessario che si ponga adeguata cura sia nell'esecuzione che nella manutenzione e gestione della struttura e si utilizzino tutti gli accorgimenti utili alla conservazione delle caratteristiche fisiche e dinamiche dei materiali e delle strutture. La qualità dei materiali e le dimensioni degli elementi sono coerenti con tali obiettivi.

Durante le fasi di costruzione il direttore dei lavori implementerà severe procedure di controllo sulla qualità dei materiali, sulle metodologie di lavorazione e sulla conformità delle opere eseguite al progetto esecutivo nonché alle prescrizioni contenute nelle "Norme Tecniche per le Costruzioni" D.M. 17/01/2018 e relative Istruzioni.

- **PRESTAZIONI ATTESE AL COLLAUDO**

La struttura a collaudo dovrà essere conforme alle tolleranze dimensionali prescritte nella presente relazione, inoltre relativamente alle prestazioni attese esse dovranno essere quelle di cui al § 9 del D.M. 17/01/2018.

Ai fini della verifica delle prestazioni il collaudatore farà riferimento ai valori di tensioni, deformazioni e spostamenti desumibili dall'allegato fascicolo dei calcoli statici per il valore delle azioni pari a quelle di esercizio.

- **VALIDAZIONE DEL SOFTWARE DI CALCOLO AI SENSI DEL P.TO §10.2 DEL D.M. 17.01.2018**

Viene riportata in allegato la documentazione inerente alla validazione del software di calcolo impiegato per l'esecuzione dell'analisi strutturale del fabbricato in esame e le relative verifiche degli elementi strutturali componenti la sovrastruttura in elevazione (CDS Win) e della struttura di fondazione (C.D.Gs. Win) ai sensi del §10.2 del D.M.17.01.2018.

Grottammare, lì    Novembre 2019

Il Tecnico:Ing. CARLO CESARONI

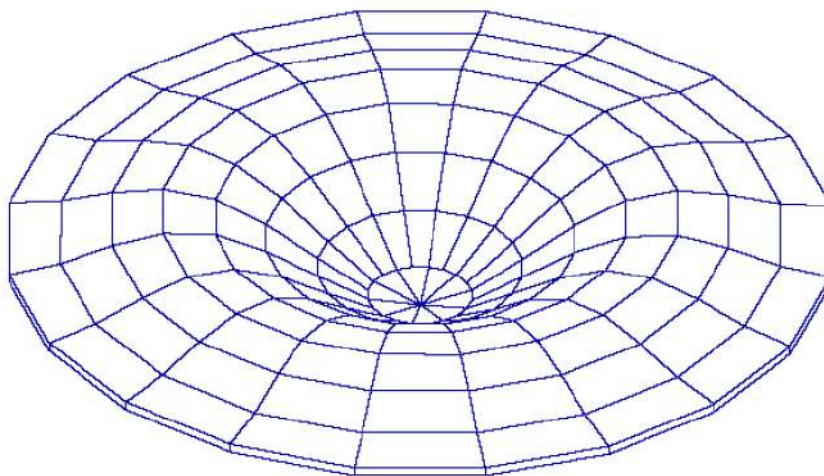




***CDS Win – CDMa Win***

*Release 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 e 2019*

***Validazione del codice di calcolo***



## **Indice**

### Analisi Statica Lineare

Test di verifica n° 1: Trave piana isostaticamente vincolata  
Test di verifica n° 2: Ginocchiera soggetta a carico concentrato  
Test di verifica n° 3: Trave piana con estremi incastrati  
Test di verifica n° 4: Sistema piano di aste sospese (1)  
Test di verifica n° 5: Stato tensionale di una trave inflessa  
Test di verifica n° 6: Stato tensionale di una trave inflessa  
Test di verifica n° 7: Sistema piano di aste sospese (2)  
Test di verifica n° 8: Sistema piano di aste sospese (3)  
Test di verifica n° 9: Telaio piano  
Test di verifica n°10: Travatura reticolare piana  
Test di verifica n°11: Pipe-line soggetta a carico termico  
Test di verifica n°12: Trave a mensola soggetta all'azione di un momento torcente concentrato  
Test di verifica n°13: Trave a mensola a sezione  
Test di verifica n°14: Lastra rettangolare piana  
Test di verifica n°15: Flessione in una piastra circolare utilizzando elementi assialsimmetrici  
Test di verifica n°16: La piastra rettangolare incastrata al contorno e soggetta ad un carico uniformemente ripartito

### Analisi Statica: Non Linearità Geometrica

Test di verifica n°17: Carico critico di una trave piana

### Analisi dinamica modale

Test di verifica n°18: Frequenze naturali di vibrazione in una trave appoggiata- appoggiata  
Test di verifica n°19: Frequenze naturali di vibrazione in una trave a mensola  
Test di verifica n°20: Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore semplice  
Test di verifica n°21: Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore con due masse in serie  
Test di verifica n°22: Analisi in frequenza di una piastra rettangolare  
Test di verifica n°23: Analisi in frequenza di una piastra sottile romboidale

### Analisi statica non lineare Push Over

Test di verifica n°24: Elemento mensola a sezione costante  
Test di verifica n°25: Telaio piano  
Test di verifica n°26: Edificio regolare

### Verifiche agli S.L.E. e calcolo delle sollecitazioni resistenti per sezioni in c.a.

Test di verifica n°27:     a) Verifica allo Stato Limite di Esercizio di fessurazione  
                              b) Determinazione del momento e del taglio resistenti per una sezione in c.a.

### Verifiche murature (CDMa Win)

Test di verifica n°28: Analisi sismica lineare e non lineare (push over) di una facciata in muratura

### Rinforzi FRP

Test di verifica n°29: Test pratico di validazione numerica per la progettazione dei rinforzi in FRP

### Taglio ciclico

Test di verifica n°30: Resistenza a taglio in condizioni cicliche per travi e pilastri

Appendice A  
Bibliografia

## **Introduzione**

Il presente lavoro contiene un insieme di test il cui obiettivo è quello di verificare l'affidabilità e l'applicabilità del solutore agli elementi finiti utilizzato dal programma **CDSWin**.

Il metodo degli elementi finiti rappresenta un argomento teorico molto vasto, sicuramente complesso, e gli esempi riportati, pur non avendo la pretesa di chiarire tale procedimento, rappresentano la più comune e basilare applicazione di questo metodo.

Al fine di raggiungere l'obiettivo di verifica posto, gli esempi riportati nelle pagine seguenti abbracciano differenti analisi di calcolo, parecchi elementi, diverse mesh e/o condizioni al contorno e provenendo da autorevoli testi ingegneristici, fanno riferimento a problemi la cui soluzione teorica, essendo nota, può essere confrontata con quella fornita dal programma al termine dell'elaborazione.

Si osservi, inoltre, che i problemi analizzati nella maggior parte dei test sono stati estratti da testi anglosassoni che, ovviamente, utilizzano unità di misura diverse da quelle metriche. Pertanto, per poter convertire le varie grandezze dal sistema anglosassone a quello metrico, si è reso necessario il ricorso a fattori di conversione, che approssimando tra loro i valori delle varie grandezze, ne consentono il passaggio da un sistema all'altro.

Quindi, per ciascuno dei test eseguiti è possibile affermare che il lieve scostamento esistente tra il risultato finale fornito dall'elaborazione e quello teorico è imputabile proprio alle conversioni effettuate.

Per ogni test svolto viene citata la specifica fonte del riferimento e vengono forniti tutti i dati necessari per riprodurre i risultati ottenuti.

## Test di verifica n°1

### Trave piana isostaticamente vincolata

**Fonte di riferimento:** A&C- Rif.[ 1 ]: Analisi e calcolo n° 5, Apr.-Giu. 2001

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Una trave a sezione rettangolare è isostaticamente vincolata ed è soggetta all'azione di un carico assiale concentrato P in corrispondenza del nodo n° 2.

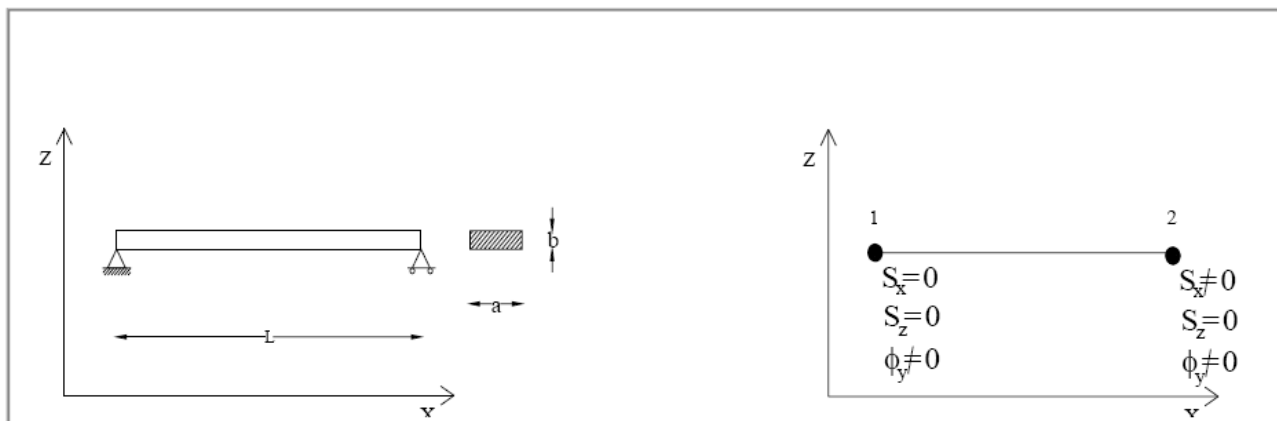


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Modello di calcolo:** Ai fini dell'analisi è sufficiente modellare il sistema come unico elemento monodimensionale. I nodi vengono inseriti in corrispondenza degli estremi vincolati.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
$E=2000000 \text{ Kg/cm}^2$	Larghezza, $a=20 \text{ mm}$
	Altezza, $b=5 \text{ mm}$

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle aste l'analisi si propone di illustrare:

- La linearità della relazione carico-deformazione;
- L'effetto del carico applicato eliminando gradi di libertà al sistema;
- L'analisi delle deformazioni libere;

e quindi di verificare il comportamento dell'elemento asta sotto l'azione del carico P confrontando la soluzione teorica con quella fornita dall'analisi di **CDSWin**.

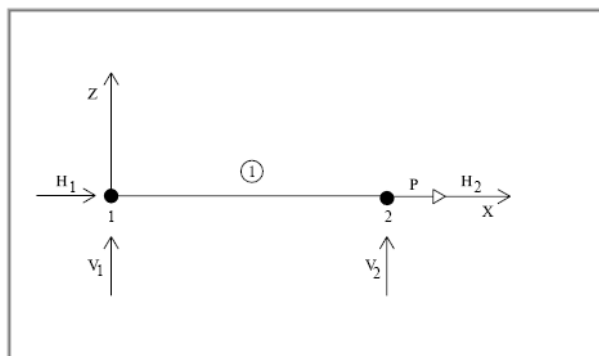


Fig. 3: Rappresentazione dello schema di calcolo

**Caso 1:**

Con le condizioni al contorno descritte in fig. 1 eseguire il calcolo applicando il carico  $P = 0.1$  t in corrispondenza del nodo n°2 in direzione x.

La soluzione teorica, per il sistema descritto, prevede un unico spostamento assiale non nullo sul nodo n° 2 ed un valore della forza di reazione  $H1$  pari al valore del carico  $P$  applicato.

Tutte le altre reazioni vincolari devono risultare nulle.

$$H1 = P$$

$$V1 = 0$$

$$V2 = 0$$

**Spostamenti  $u_x$  (mm)**

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0.005	0.005	1.000

**Spostamenti  $v_z$  (mm)**

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Rati (*)
	$v_z$	$v_z$	$v_z$
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Reazioni vincolari****H ( tonn. )**

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	-0.10	-0.10	1.000
2	0	0	1.000

**V ( tonn. )**

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Caso 2:**

Eseguire il calcolo applicando il carico  $P = 0.2 \text{ t}$  in corrispondenza del nodo n°2 in direzione x.

La soluzione prevede per uno carico doppio uno spostamento assiale doppio in corrispondenza del punto di applicazione del carico (nodo n° 2).

Questo garantisce la linearità del comportamento del sistema analizzato.

**Spostamenti  $u_x$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0.01	0.01	1.000

**Spostamenti  $v_z$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Reazioni vincolari****H ( tonn. )**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
	H	H	H
1	-0.20	-0.20	1.000
2	0	0	1.000

**V ( tonn. )**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Caso 3:**

Eseguire il calcolo come descritto nel caso 1, ma bloccando anche la traslazione orizzontale del nodo n°2.

La soluzione teorica, in questo caso, prevede per lo spostamento assiale del nodo n° 2 un valore nullo.

**Spostamenti  $u_x$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Spostamenti  $v_z$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Caso 4:**

Eeguire il calcolo come descritto nel caso 1, ma applicando nel nodo n°2 il carico P in direzione z. Se è soppresso il grado di libertà in z, nel nodo, anche in questo caso non deve verificarsi alcuna traslazione in z.

**Spostamenti  $u_x$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Spostamenti  $v_z$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Caso 5:**

Utilizzando le condizioni al contorno del caso 1 imporre in corrispondenza del nodo n° 2 uno spostamento assiale di entità pari a quella generata dall'applicazione del carico  $P = 0.1 \text{ t}$  :

$$\eta = 0.005 \text{ mm}$$

In questo caso il risultato dell'analisi deve produrre nel nodo n°2 l'insorgere di una forza pari a  $P = 0.1 \text{ t}$ . Ciò evidenzia, per il nodo, la presenza di una relazione di equivalenza tra forze e spostamenti.

**Spostamenti  $u_x$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0.005	0.005	1.000

**Spostamenti  $v_z$  (mm)**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Reazioni vincolari** **$H$  ( tonn. )**

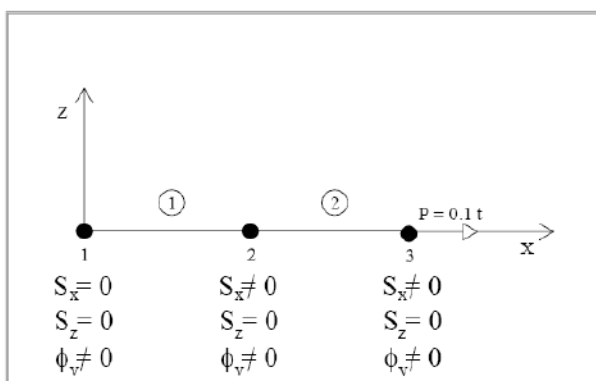
<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	-0.10	-0.10	1.000
2	-0.10	-0.10	1.000

 **$V$  ( tonn. )**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(*)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

**Caso 6:**

Suddividere, mediante l'inserimento di un nodo nel punto mediano, l'asta del sistema descritto in due elementi e con le condizioni al contorno definite nel caso 1 analizzarne il comportamento.



L'analisi eseguita con **CDSWin** produce gli stessi effetti già esaminati nel caso 1.

(\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.



## Test di verifica n°2

### Ginocchiera soggetta a carico concentrato

**Fonte di riferimento:** A&C- Rif.[ 2 ]: Analisi e calcolo n° 6, Lug.-Set. 2001

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Dato il modello di calcolo in fig. 1, costituito da due aste di sezione rettangolare, applicare un carico  $P=0,1$  t e determinare i valori degli spostamenti del nodo 2 in relazione al condizionamento che si genera a seguito della variazione dell'angolo  $\alpha$ .

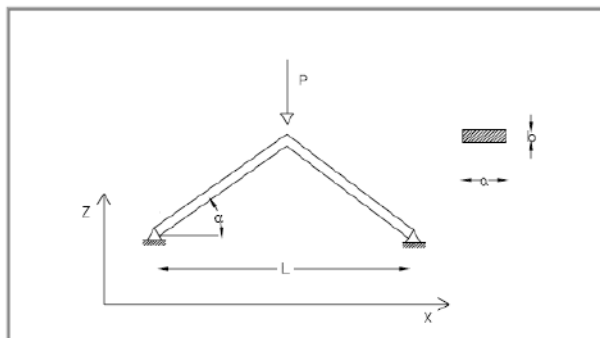


Fig. 1: Schema del problema

**Modello di calcolo:** Ai fini dell'analisi è sufficiente modellare il sistema come unione di due elementi monodimensionali. I nodi vengono inseriti in corrispondenza degli estremi vincolati e del punto d'applicazione del carico P.

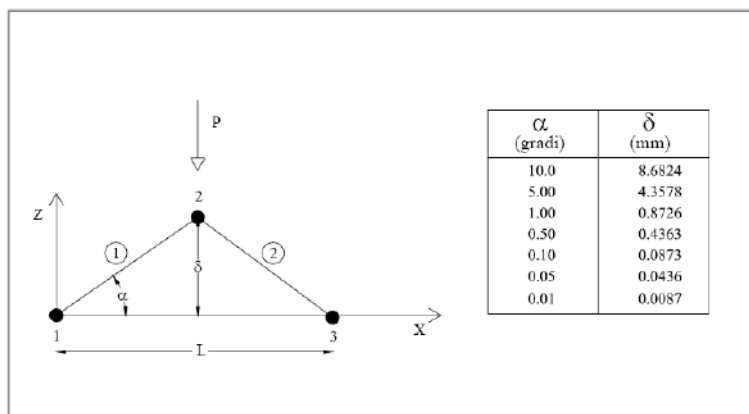


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
	Larghezza, $a=20$ mm
$E=2000000$ Kg/cm <sup>2</sup>	Altezza, $b=5$ mm
	Lunghezza, $L=10$ cm

**Obiettivo:** L'analisi si propone di investigare l'esistenza di eventuali mal-condizionamenti della matrice di rigidità del sistema, e quindi di verificare il comportamento dell'elemento asta sotto l'azione del carico P.

**Caso 1:**

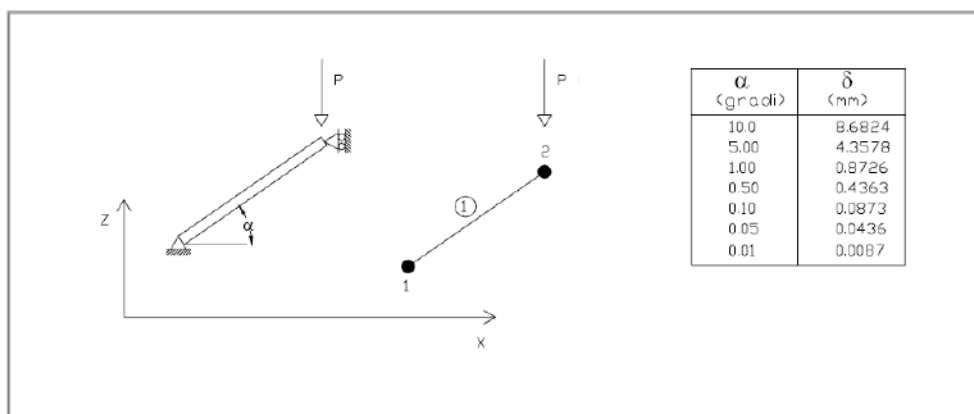
Per il nodo n° 2 della struttura riportata in Fig. 1 e con le condizioni al contorno descritte, al variare dell'inclinazione dell'angolo  $\alpha$ , si sono ottenuti i seguenti valori di spostamento:

**Spostamenti  $v_z$  (mm)**

$\alpha$ (gradi)	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
10.0	- 0.043343	- 0.043	0.992
5.00	- 0.166435	- 0.166	0.997
1.00	- 4.10599	- 4.106	1.000
0.50	-16.4183	- 16.418	0.999
0.10	- 410.037	- 410.037	1.000
0.05	- 1643.91	- 1643.908	1.000
0.01	- 41286.8	- 41286.832	1.000

**Caso 2:**

Nel caso in cui la struttura venga modellata con un solo elemento, eseguire nuovamente il calcolo e valutare i risultati.

**Fig. 3: Schema del problema****Spostamenti  $v_z$  (mm)**

$\alpha$ (gradi)	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
10.0	- 0.043343	-0.043	0.992
5.00	- 0.166435	-0.166	0.997
1.00	- 4.10599	-4.106	1.000
0.50	-16.4183	-16.418	0.999
0.10	- 410.037	-410.037	1.000
0.05	- 1643.91	-1643.908	1.000
0.01	- 41286.8	-41286.832	1.000

(\*): per Ratio si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°3

### Trave piana con estremi incastrati

**Fonte di riferimento:** Timoshenko, Rif. [ 4 ]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 26, problem 10

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Asta di sezione prismatica incastrata agli estremi e soggetta, in corrispondenza di due sezioni intermedie, all'azione delle forze assiali  $F_1$  e  $F_2$ .

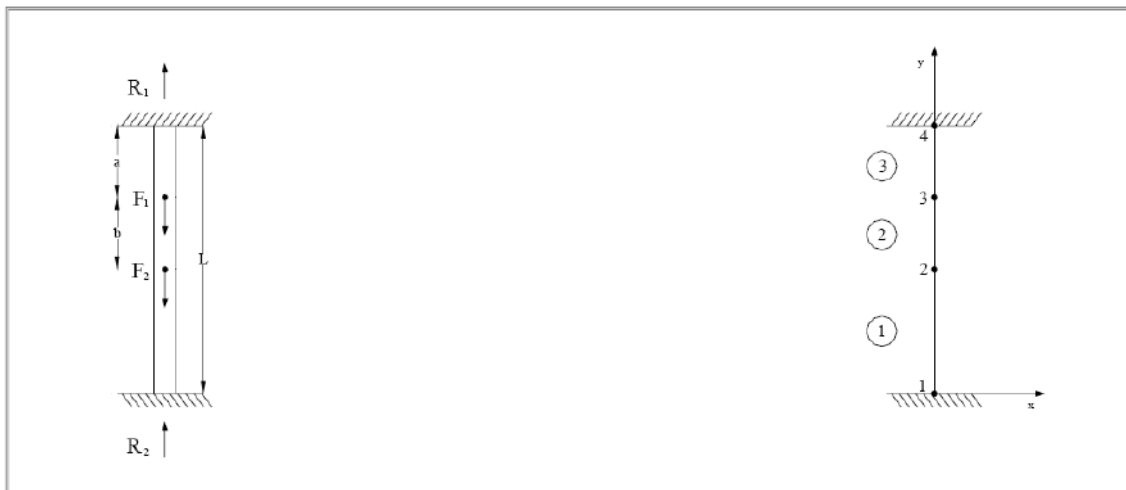


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle aste determinare le reazioni vincolari  $R_1$  e  $R_2$ .

**Modello di calcolo:** I nodi vengono inseriti in corrispondenza degli estremi vincolati e di ciascuno dei due punti di applicazione delle forze  $F_1$  e  $F_2$ .

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L=10 \text{ in}= 25.4 \text{ cm}$	
$E=30 \times 10^6 \text{ psi}=2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$a= b=0.3L=7.62 \text{ cm}$	$F_1=2F_2=1000 \text{ lb}=0.454 \text{ t}$
	$A=100 \text{ cm}^2$	

**Soluzione teorica:** La soluzione teorica fornisce:

$$R_1 = 900.0 \text{ lb} = 408.23 \text{ Kg}$$

$$R_2 = 600.0 \text{ lb} = 272.15 \text{ Kg}$$

**Analisi dei risultati** <sup>(\*)</sup>:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> <sup>(**)</sup>
$R_1 = 408.23 \text{ Kg}$	408 Kg	0.999
$R_2 = 272.15 \text{ Kg}$	272 Kg	0.999

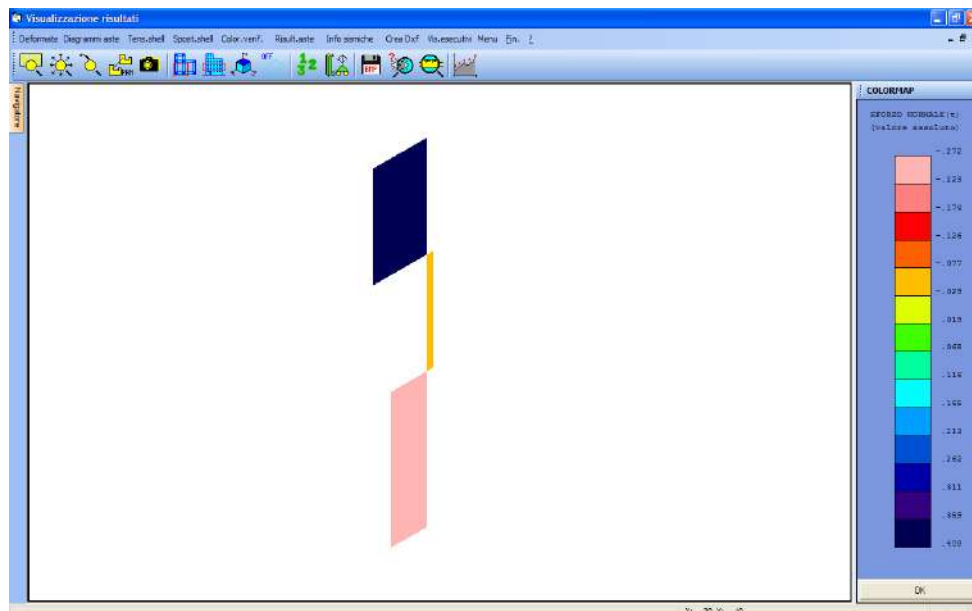


Fig. 3: Colormap sforzo normale

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°4

### Sistema piano di aste sospese (1)

**Fonte di riferimento:** Timoshenko, Rif. [ 4 ]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 10, problem 2

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** La struttura in fig. 1 è costituita da due aste d'acciaio uguali, ciascuna di lunghezza  $L$  e sezione trasversale di area  $A$ . Tutti gli estremi delle due aste sono incernierati e la struttura viene sottoposta all'azione di un carico concentrato  $F$ .

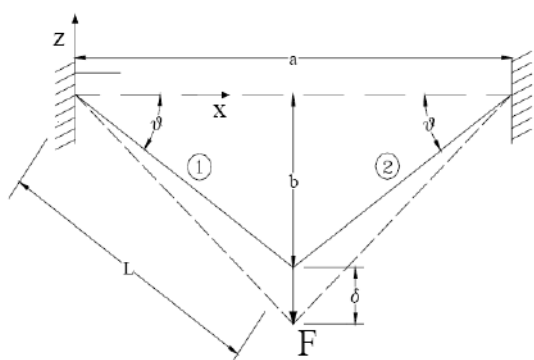


Fig. 1: Schema del problema

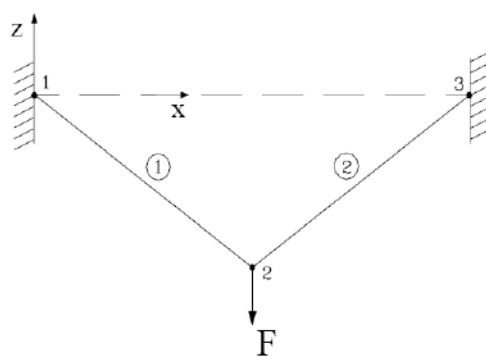


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle aste, perché trascurabile rispetto al carico  $F$ , determinare sia il valore della tensione  $\sigma$  in ciascuna delle aste, sia il valore dell'abbassamento  $\delta$  del nodo 2.

**Modello di calcolo:** Le dimensioni  $a$  e  $b$  sono calcolate parametricamente utilizzando le relazioni:

$$a = 2L \cos \theta; \quad b = L \sin \theta$$

### Caratteristiche meccanico-geometriche

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L = 15 \text{ ft} = 457.20 \text{ cm}$	
$E_{\text{acciaio}} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$A = 0.5 \text{ in}^2 = 3.23 \text{ cm}^2$	$F = 5000 \text{ lb} = 2.267 \text{ t}$
	$\Theta = 30^\circ$	

**Soluzione teorica:** Nel nostro caso, la soluzione teorica fornisce:

$$\sigma = 10000 \text{ psi} = 703 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta = 0.120 \text{ in} = 3.048 \text{ mm}$$

**Analisi dei risultati (\*)**:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
$\sigma = 703 \text{ kg/cm}^2$	$N/A = 2270/3.23 = 702.8 \text{ kg/cm}^2$	0.999
$\delta = 3.048 \text{ mm}$	3.043 mm	0.998

Si osserva, anche in questo caso un'ottima conformità tra il risultato di output del programma e quello teorico.

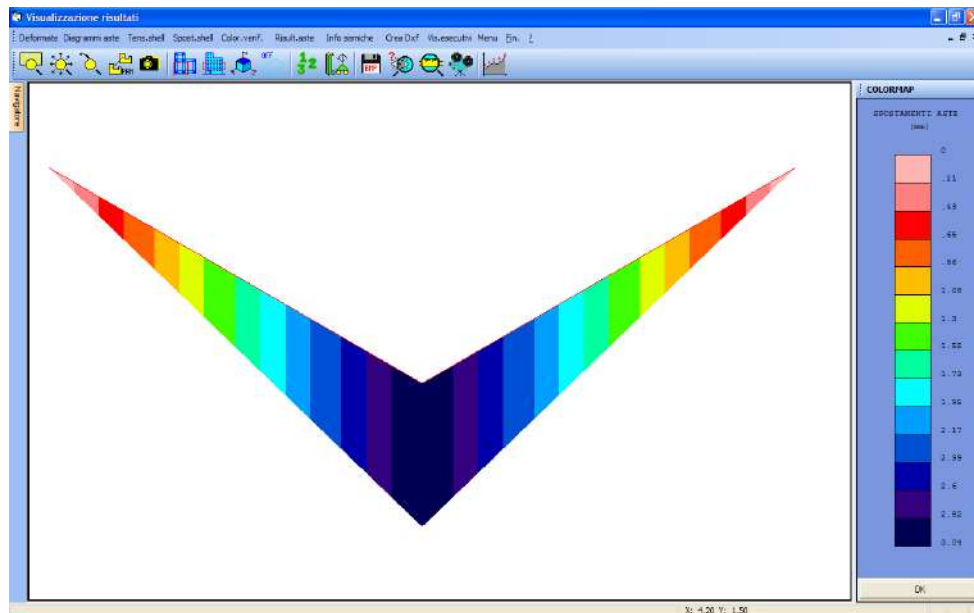


Fig. 4: Colormap deformazioni

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°5

### Stato tensionale di una trave inflessa

**Fonte di riferimento:** Timoshenko, Rif. [ 4 ]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 98, Pb. 4

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Una trave a doppio T, con sezione trasversale di area  $A$ , è isostaticamente vincolata mediante due vincoli semplici, come mostrato in fig. 1. Il sistema così descritto viene sottoposto, in corrispondenza delle estremità a sbalzo, all'azione di due carichi uniformemente distribuiti di intensità  $w$ .

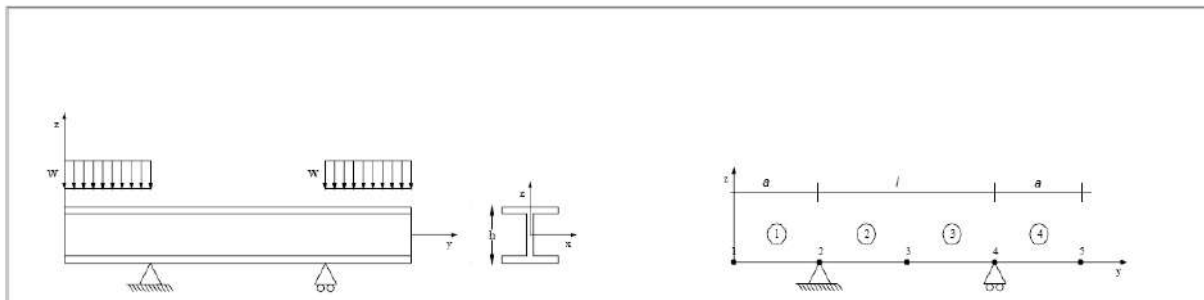


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso dell'asta, perché irrilevante rispetto alle forze in gioco, determinare sia il valore della tensione  $\sigma_{MAX}$ , sia il valore dell'abbassamento  $\delta$  in corrispondenza della mezzeria (nodo 3).

**Modello di calcolo:** Per la modellazione della struttura assegnata è sufficiente inserire 5 nodi e suddividere, quindi, l'asta in 4 elementi.

### Caratteristiche meccanico-geometriche

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$l = 240 \text{ in} = 609.6 \text{ cm}$	
	$a = 120 \text{ in} = 304.8 \text{ cm}$	
$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$h = 30 \text{ in} = 76.2 \text{ cm}$	$w = 10000 \text{ lb/ft} = 14.88 \text{ t/m}$
	$A = 50.65 \text{ in}^2 = 326.77 \text{ cm}^2$	
	$I_z = 7892 \text{ in}^4 = 328489.8 \text{ cm}^4$	
	$W_z = I_z / (h/2) = 8621.7 \text{ cm}^3$	

**Soluzione teorica:** Nel nostro caso, la soluzione teorica fornisce:

$$\sigma = 11400 \text{ psi} = 802 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta = 0.182 \text{ in} = 4.623 \text{ mm}$$

**Analisi dei risultati (\*)**:

<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio (**)</b>
$\sigma = 802 \text{ kg/cm}^2$	$\sigma = M/W_{el} = 6912000/8621.7 = 801.7 \text{ kg/cm}^2$	1.000
$\delta = 4.623 \text{ mm}$	4.634 mm	1.002

Si osserva, anche in questo caso un'ottima conformità tra il risultato di output del programma e quello teorico.

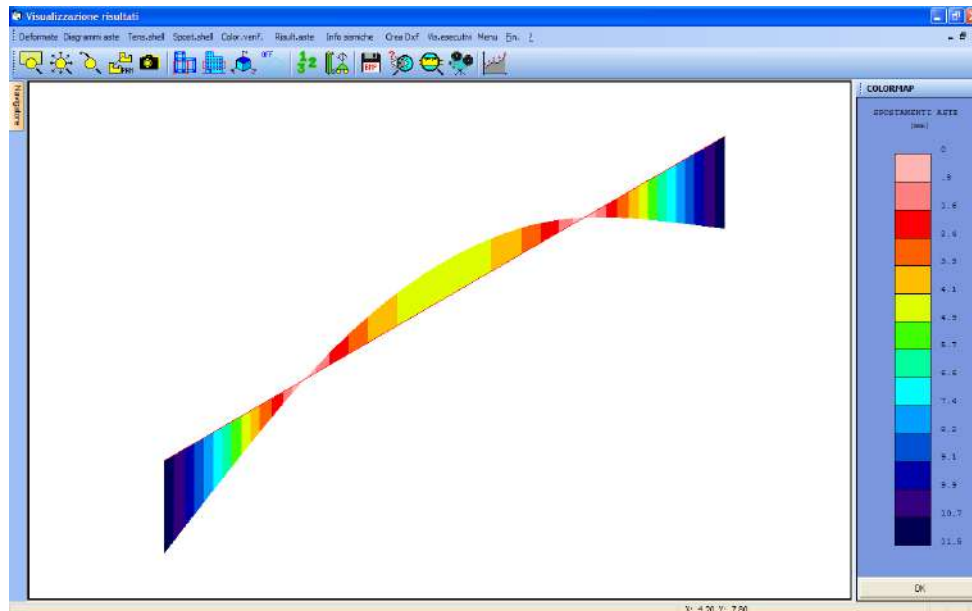


Fig. 3: Colormap deformazioni

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.



## Test di verifica n°6

### Stato tensionale di una trave inflessa

**Fonte di riferimento:** Cremonese, Rif. [ 10 ]: Manuale Ingegneria Civile, ESAC, SEZ. I pag. 82 e succ.

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** La struttura mostrata in fig. 1 consiste in una trave di sezione circolare, incastrata in corrispondenza del primo estremo e vincolata mediante un carrello in corrispondenza del secondo. La trave descritta è soggetta all'azione di un carico  $q$  uniformemente distribuito per tutta la sua lunghezza.

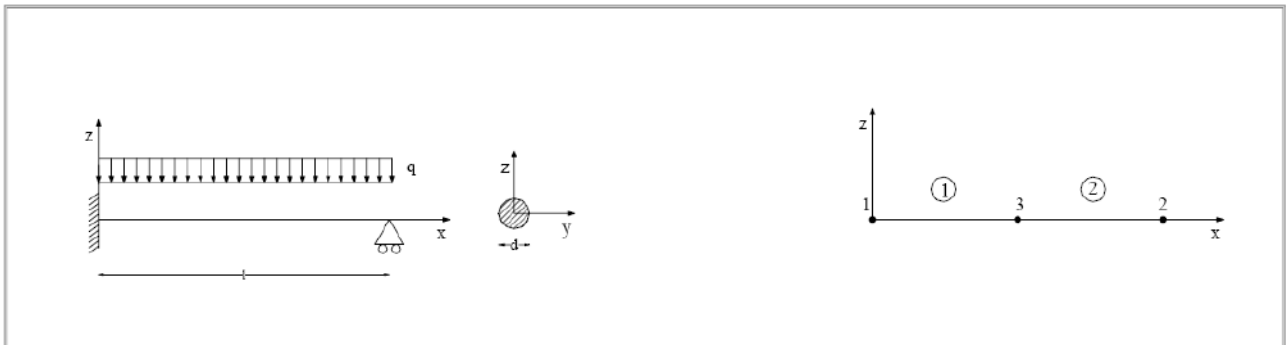


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso dell'asta, perché irrilevante rispetto alle forze in gioco, determinare il valore del momento flettente  $M_A$  in corrispondenza dell'incastro e la reazione del carrello  $V_B$ .

**Modello di calcolo:** Per la modellazione della struttura assegnata è sufficiente inserire 3 nodi e suddividere, quindi, l'asta in 2 elementi.

### Caratteristiche meccanico-geometriche

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E=30 \times 10^6 \text{ psi}=2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$d=1.5 \text{ in}=3.81 \text{ cm}$	$q=100 \text{ pd/in}=1.784 \text{ t/m}$
	$l=20 \text{ in}=50.8 \text{ cm}$	

**Soluzione teorica:** Nel nostro caso, la soluzione teorica fornisce:

$$V_B = \frac{3}{8} q l = 750 \text{ pd} = 340.19 \text{ Kg};$$

$$M(z) = \frac{q l^2}{8} \left( 3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^2}{l^2} \right); \quad \text{da cui si ottiene:} \quad M_A = 5000 \text{ in pd} = 0.058 \text{ tm}$$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:**

<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(**)</sup></b>
$V_B = 340.19 \text{ kg}$	340 kg	1.000
$M_A = 0.058 \text{ tm}$	0.058 tm	1.000

Si osserva, anche in questo caso un'ottima conformità tra il risultato di output del programma e quello teorico.

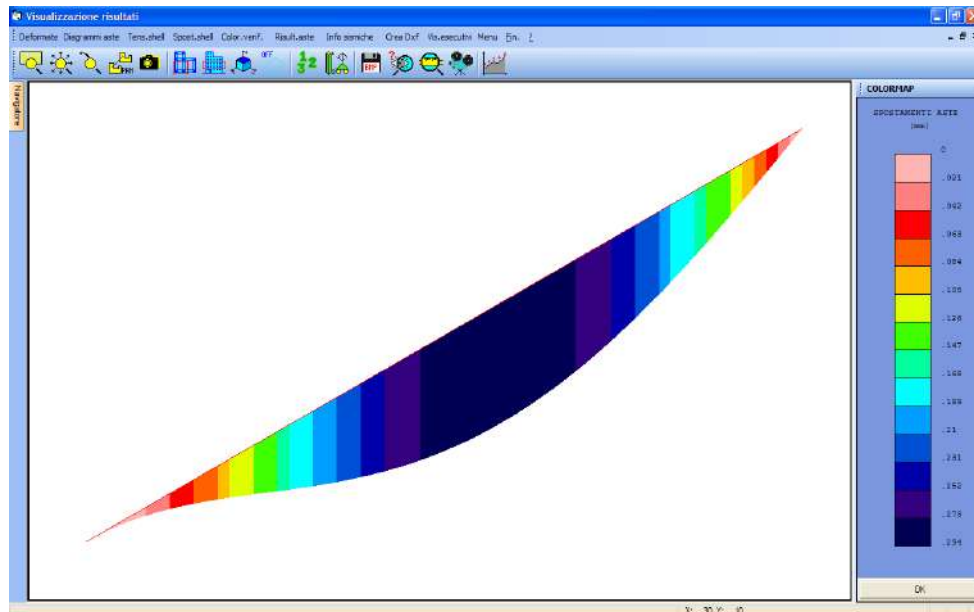


Fig. 3, Colormap deformazioni

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°7

### Sistema piano di aste sospese (2)

**Fonte di riferimento:** W. Nash, Rif. [ 5 ]: Strength of Material, pg. 28-29, problem n. 2.3

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Una barra infinitamente rigida è sospesa mediante il sistema di aste mostrato nella figura. Le due aste più esterne sono realizzate in acciaio, mentre quella interna è in rame. Le tre aste, per  $z = L_2$ , vengono vincolate con un incastro.

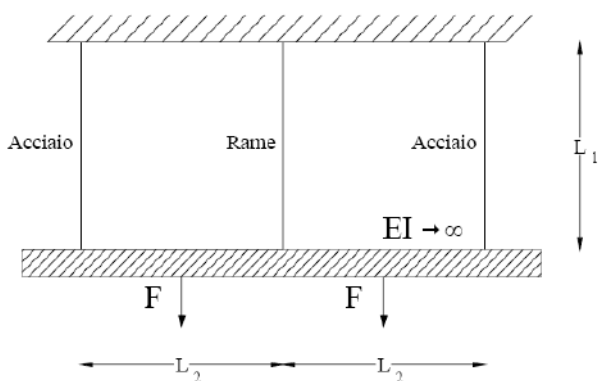


Fig. 1: Schema del problema

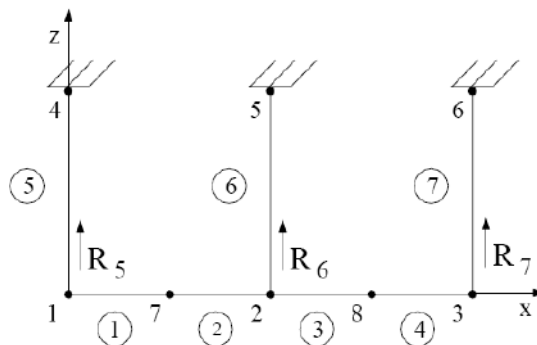


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle barre determinare lo sforzo in ciascuna delle aste verticali.

**Modello di calcolo:** Per la rappresentazione della struttura è sufficiente inserire n° 8 nodi, in corrispondenza sia degli estremi delle aste che dei punti di applicazione delle forze F, suddividendo così il sistema in un insieme di 7 aste.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E_{\text{acciaio}} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$L_1 = 7 \text{ ft} = 213.36 \text{ cm}$	$F = 12000 \text{ lb} = 5.44 \text{ t}$
$E_{\text{rame}} = 17 \times 10^6 \text{ psi} = 1195218 \text{ Kg/cm}^2$	$L_2 = 10 \text{ ft} = 304.80 \text{ cm}$	
	$A_{\text{acciaio}} = 0.50 \text{ in}^2 = 3.2258 \text{ cm}^2$	
	$A_{\text{rame}} = 1.50 \text{ in}^2 = 9.6774 \text{ cm}^2$	

**Soluzione teorica:** Le condizioni di simmetria impongono che le forze interne che insorgono in ciascuna delle due barre di acciaio siano uguali e pertanto, dalla statica rimane una sola equazione:

$$\sum F_v = 2P_{st} + P_{cu} - 2F = 0; \quad (1)$$

La (1) contiene due incognite e dunque il problema risulta staticamente indeterminato, ma ricordando che:

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

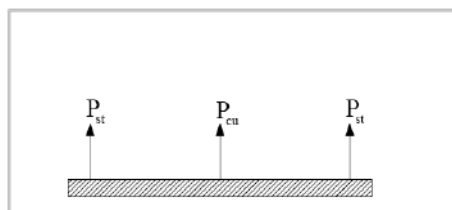


Fig. 3: Diagramma di corpo libero

ed imponendo che sia l'asta di rame che quelle in acciaio subiscano il medesimo allungamento, troviamo:

$$\frac{P_{st} L}{A_{st} E_{st}} = \frac{P_{cu} L}{A_{cu} E_{cu}} \quad \text{da cui: } P_{st} = 0.588 P_{cu} \quad (2)$$

la (2) insieme alla (1) fornisce:

$$R_5 = R_7 = 6485 \text{ lb} = 2.94 \text{ t}$$

$$R_6 = 11029 \text{ lb} = 5.00 \text{ t}$$

**Analisi dei risultati (\*)**:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> (**)
$R_5 = R_7 = 2.94 \text{ t}$	2.94 t	1.000
$R_6 = 5.00 \text{ t}$	5.00 t	1.000

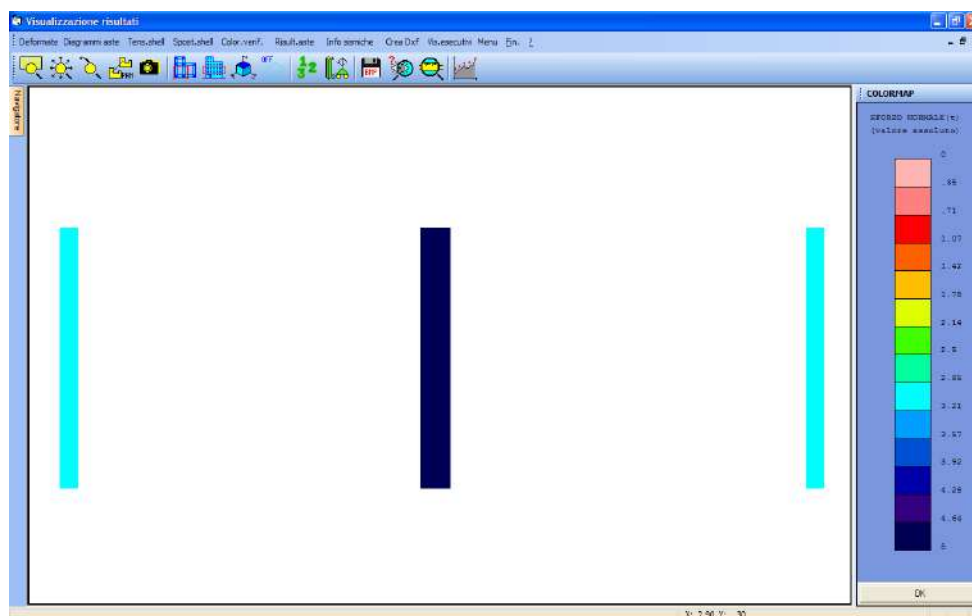


Fig. 4: Colormap sforzo normale

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°8

### Sistema piano di aste sospese (3)

**Fonte di riferimento:** Timoshenko, Rif. [ 4 ]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 30, problem 9

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Una barra infinitamente rigida è sospesa mediante il sistema di aste mostrato nella figura. La struttura così definita viene sottoposta ad un gradiente termico  $\Delta T$  ed all'azione di un carico concentrato  $Q$ . Per  $z = L_2$ , le aste verticali vengono vincolate con un incastro.

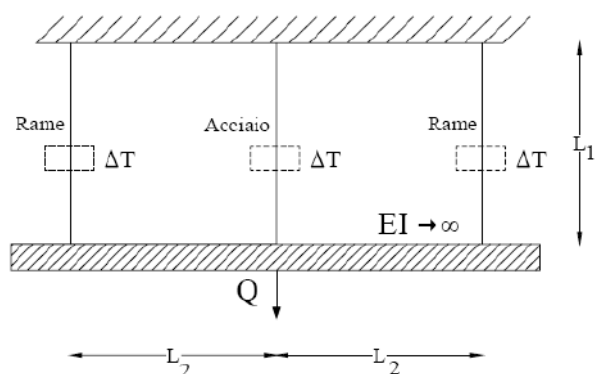


Fig. 1: Schema del problema

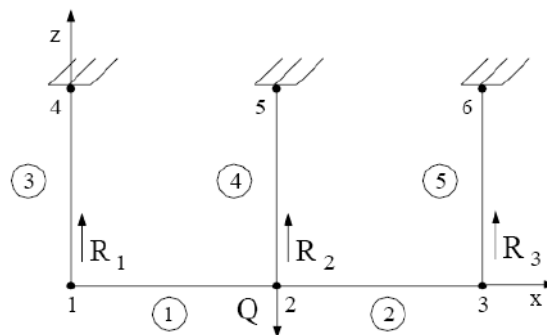


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle barre determinare gli sforzi in ciascuna delle aste verticali.

**Modello di calcolo:** Per la rappresentazione della struttura è sufficiente inserire, in corrispondenza sia degli estremi delle aste che del punto di applicazione delle forza  $Q$ , n° 6 nodi e quindi suddividere il sistema in un insieme di 5 aste.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E_{acciaio} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$L_1 = 20 \text{ in} = 50.8 \text{ cm}$	$Q = 4000 \text{ lb} = 1.81436 \text{ t}$
$\alpha_{acciaio} = 70 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$	$10 \text{ in} = 25.4 \text{ cm}$	$\Delta T = 10^\circ\text{F}$
$E_{rame} = 16 \times 10^6 \text{ psi} = 1124911 \text{ Kg/cm}^2$	$A = 0.10 \text{ in}^2 = 0.64516 \text{ cm}^2$	
$\alpha_{rame} = 92 \times 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$		

**Soluzione teorica:** Partendo dalla classica relazione:

$$F = K \times S$$

e considerando che:

$$F = Q + 2 \times (\alpha_{rame} \times \Delta T) \times E_{rame} \times A + (\alpha_{acciaio} \times \Delta T) \times E_{acciaio} \times A$$

$$K = 2 \times (E_{rame} \times A)/L + (E_{acciaio} \times A)/L$$

è facile ottenere:

$$N_{rame} = 681,7 \text{ Kg}$$

$$N_{acciaio} = 450,9 \text{ Kg}$$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio <sup>(**)</sup></i>
$N_{rame} = 681,7 \text{ Kg}$	682 kg	1,000
$N_{acciaio} = 450,9 \text{ Kg}$	451 kg	1,000

**Osservazioni :** Poiché in **CDSWin** per le aste generiche è possibile definire un solo coefficiente di dilatazione termica  $\alpha$ , per inserire il carico termico proposto nell'esercizio si è reso necessario imporre variazioni termiche differenti per le due tipologie di aste in esame secondo la relazione:

$$F_{termica-i} = \Delta L \times E_i \text{ A/L} = L \times \alpha_i \times \Delta T \times E_i \text{ A/L} = (\alpha_i \Delta T) \times E_i \text{ A}$$

Da quanto esposto ne seguono i due seguenti carichi termici:

$$\Delta T_{acciaio} = 70 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T_{rame} = 9,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Inoltre, il prodotto  $\Delta T_i$  è stato opportunamente dimensionato in modo che il risultato finale fosse numericamente coerente con i dati assegnati. Questo perché il programma **CDSWin**, in caso di analisi termica, provvede a moltiplicare il carico termico inserito per il coefficiente di dilatazione termica  $\alpha$ , presente nei parametri generali relativi all'analisi termica, e posto pari a  $1 \times 10^{-5}$ .

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°9

### Telaio piano

**Fonte di riferimento:** Timoshenko, Rif. [ 4 ]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 188-191

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Un telaio, staticamente indeterminato, è costituito da tre aste ed soggetto all'azione di una forza concentrata P applicata nella mezzzeria del traverso. I due ritto vengono vincolati al suolo mediante incastri.

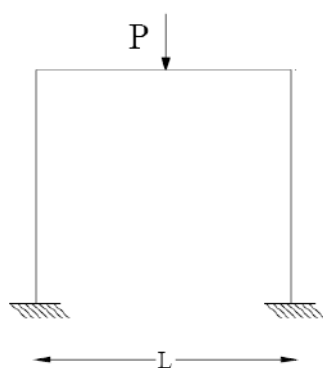


Fig. 1: Schema del problema

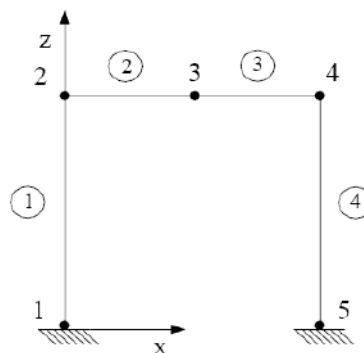


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle aste determinare la forza reattiva verticale in corrispondenza dei nodi 1 e 5.

**Modello di calcolo:** Per modellare correttamente la struttura è necessario inserire 5 nodi e 4 aste. Il nodo centrale n 3 viene inserito per consentire l'input della forza concentrata.

Per quanto riguarda la condizione di vincolo relativa ai nodi 1 e 5 vengono bloccati tutti i g.d.l.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L = 120 \text{ in} = 3.04 \text{ m}$	
$E_{\text{acciaio}} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg cm}^2$	$h = 100 \text{ in} = 2.54 \text{ m}$	$P = 1000 \text{ lb} = 0.45 \text{ t}$
	$A_{\text{traverso}} = 8 \text{ in}^2 = 51.61 \text{ cm}^2$	
	$A_{\text{ritto}} = 4 \text{ in}^2 = 25.80 \text{ cm}^2$	

**Soluzione teorica:** La soluzione teorica fornisce:

$$V = 500 \text{ pounds} = 0.225 \text{ t}$$

**Analisi dei risultati** <sup>(\*)</sup>:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> <sup>(**)</sup>
$V = 0.225 \text{ t}$	$0.225 \text{ t}$	$1.000$

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.



## Test di verifica n°10

### Travatura reticolare piana

**Fonte di riferimento:** Tuma, J.J., Munsu, R.K., Rif.[ 6 ]: Theory and Problems of Advanced Structural Analysis, Shaums's Outline Series, McGraw-Hill, pg. 257

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** La travatura reticolare piana riportata nella figura è costituita da 9 aste ed è vincolata mediante una cerniera ed un carrello. La struttura viene sottoposta all'azione simultanea dei carichi nodali  $P_x$  e  $P_z$ .

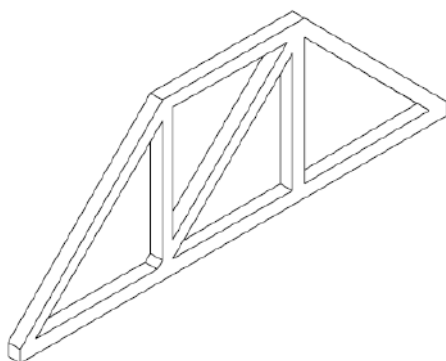


Fig. 1: Schema del problema

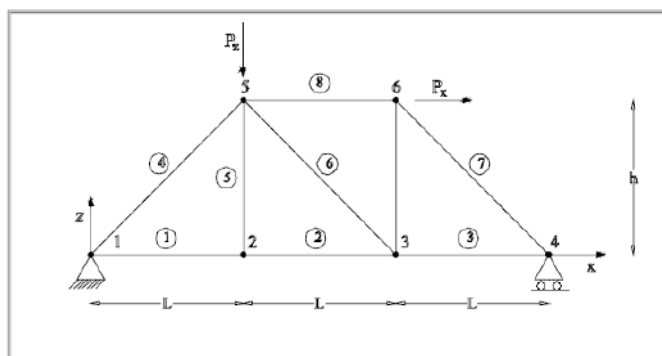


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle aste determinare gli spostamenti nodali associati alla configurazione di carico assegnata.

**Modello di calcolo:** In fig.2 viene riportata la rappresentazione agli elementi finiti della travatura piana in oggetto, le coordinate nodali vengono definite nel sistema di riferimento globale.

La struttura è costituita dall'unione di otto elementi in legno ed in corrispondenza dei nodi 1 e 4 vengono inseriti due vincoli appoggio. Inoltre, per tutti i nodi appartenenti al telaio, le traslazioni e le rotazioni fuori dal piano contenente la struttura vengono bloccate.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L_1 = 20 \text{ ft} = 6.096 \text{ m}$	$P_x = 20 \text{ Kips} = 9.07 \text{ t}$
$E = 30 \times 10^4 \text{ Kips} \cdot \text{ft}^2 / \text{ft}^2 = 146473 \text{ Kg} / \text{cm}^2$	$h = 15 \text{ ft} = 4.572 \text{ m}$	$P_z = 10 \text{ Kips} = 4.535 \text{ t}$
	$A = 1 \text{ ft}^2 = 929.03 \text{ cm}^2$	

**Soluzione teorica:**

Per carichi assiali la tensione normale è fornita dalla relazione:

$$\sigma = \frac{P}{A};$$

dove P rappresenta la forza assiale ed A l'area della sezione trasversale. Nelle condizioni descritte per il sistema assegnato, la deformazione della generica asta si ottiene dalla:

$$\Delta = \frac{PL}{AE};$$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:****Spostamenti x-dir.**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(**)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	0.451 mm	0.451 mm	1.000
3	0.902 mm	0.903 mm	1.001
4	1.128 mm	1.129 mm	1.001
5	0.914 mm	0.913 mm	0.999
6	1.094 mm	1.094 mm	1.000

**Spostamenti z-dir.**

<b>Nodi</b>	<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(**)</sup></b>
1	0	0	1.000
2	-1.335 mm	-1.335 mm	1.000
3	-0.762 mm	-0.761 mm	0.999
4	0	0	1.000
5	-1.335 mm	-1.335 mm	1.000
6	-0.634 mm	-0.634 mm	1.000

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°11

### Pipe-line soggetta a carico termico

**Fonte di riferimento:** Seely, F. B., and Smith, J.O., Rif. [ 7 ]: “Advanced Mechanics of Materials”, Second Edition, John Wiley and Sons, 1955, pages 494-497

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare Termica

**Schema di calcolo:** Lo studio dell'esercizio che segue consente di valutare la variazione di stato tensionale che si genera nella struttura in fig. 1 per effetto dell'azione di un gradiente termico  $\Delta T$ .

Il sistema oggetto dello studio è costituito dall'insieme di tre aste di sezione circolare cava, ciascuna delle quali risulta soggetta ad un variazione termica.

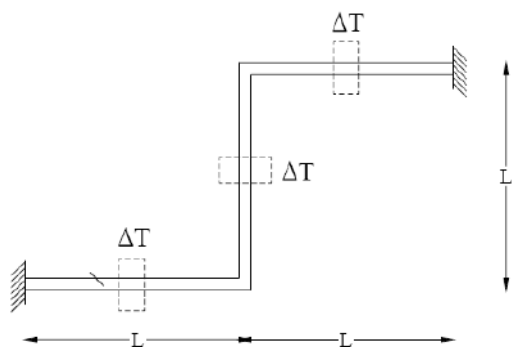


Fig. 1: Schema del problema

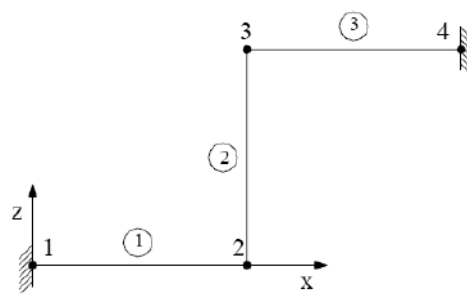


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Trascurando il peso delle aste determinare le reazioni vincolari in corrispondenza degli estremi vincolati.

**Modello di calcolo:** Il modello viene schematizzato utilizzando tre aste e quattro nodi. La condizione di incastro viene realizzata bloccando tutti i g.d.l. in corrispondenza dei nodi 1 e 4.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E_{\text{acciaio}} = 26.4 \times 10^6 \text{ psi} = 1856104 \text{ Kg/cm}^2$	$L = 240 \text{ in} = 6.096 \text{ m}$	
$\alpha = 7.26744 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$	$d_e = 12 \text{ in} = 30.48 \text{ cm}$	$\Delta T = 430^\circ\text{F}$
	$d_i = 10.25 \text{ in} = 26.03 \text{ cm}$	
	$A = 30.58 \text{ in}^2 = 197.293 \text{ cm}^2$	

**Soluzione teorica:** La soluzione dello schema assegnato si ottiene sopprimendo uno dei due vincoli esterni, sostituendo a questo le corrispondenti reazioni incognite ed impostando il seguente sistema di equazioni:

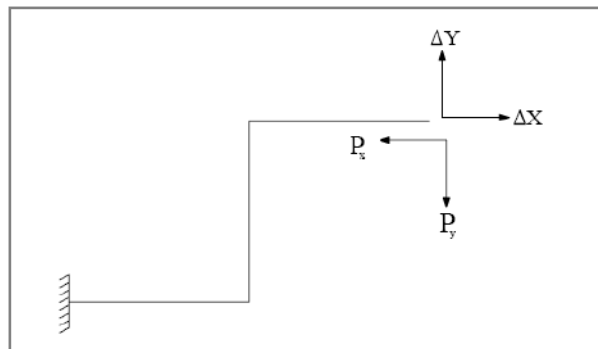


Fig. 3: Schema di risoluzione

$$\frac{7}{12} l^3 \frac{P_x}{EI} - \frac{1}{12} l^3 \frac{P_y}{EI} = \Delta X$$

$$-\frac{1}{2} l^3 \frac{P_x}{EI} - \frac{2}{3} l^3 \frac{P_y}{EI} = \Delta Y$$

da cui, risolvendo, si ottiene:

$$H_1 = H_2 = 8980.47 \text{ lb} = 4.07 \text{ t}$$

$$T_1 = T_2 = 7755.86 \text{ lb} = 3.51 \text{ t}$$

$$M_1 = M_2 = 783750 \text{ lb in} = 9.028 \text{ t m}$$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:**

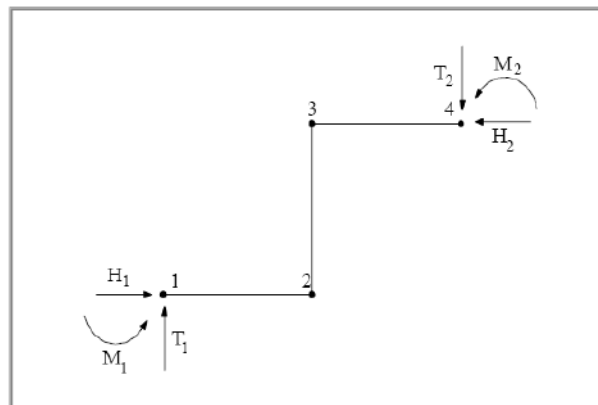


Fig. 4: Rappresentazione agli elementi finiti

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio <sup>(**)</sup>
$H_1 = H_2 = 4.07 \text{ t}$	4.07 t	1.000
$T_1 = T_2 = 3.52 \text{ t}$	3.51 t	0.997
$M_1 = M_2 = 9.03 \text{ t m}$	9.02 t m	0.999

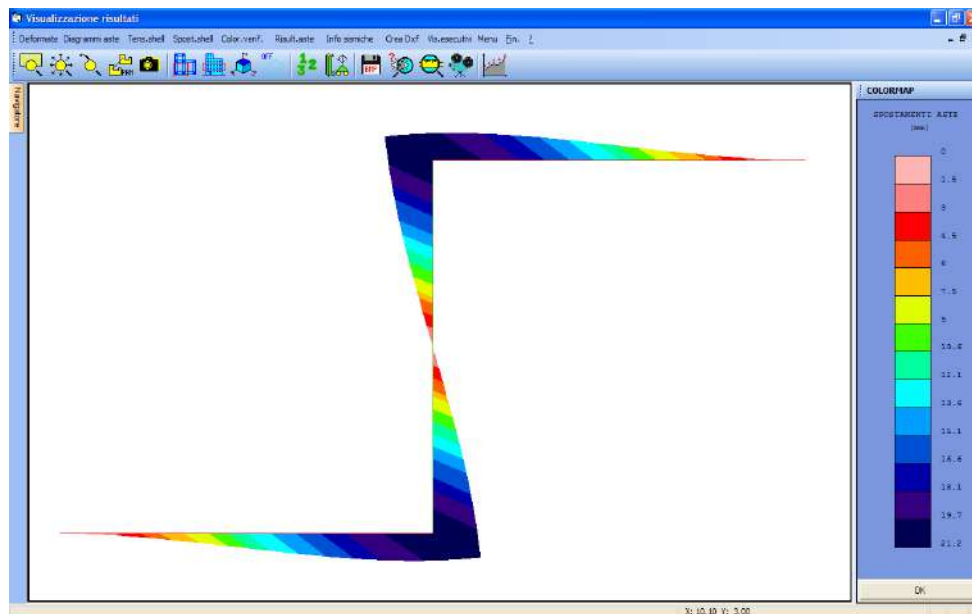


Fig. 4: Colormap deformazioni

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°12

### Trave a mensola soggetta all'azione di un momento torcente concentrato

**Fonte di riferimento:** NAFEMS, Rif. [ 8 ]: Background to Benchmarks, 1993.

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** La trave a mensola della fig. 1, presenta una sezione trasversale a “Z” ed è soggetta, in corrispondenza dell'estremo libero, all'azione di un momento torcente generato dalla presenza di due forze di taglio  $F$  concentrate sulle ali. Lo studio di questa struttura mette in evidenza l'effetto della torsione in profili a sezione aperta e pareti sottili.

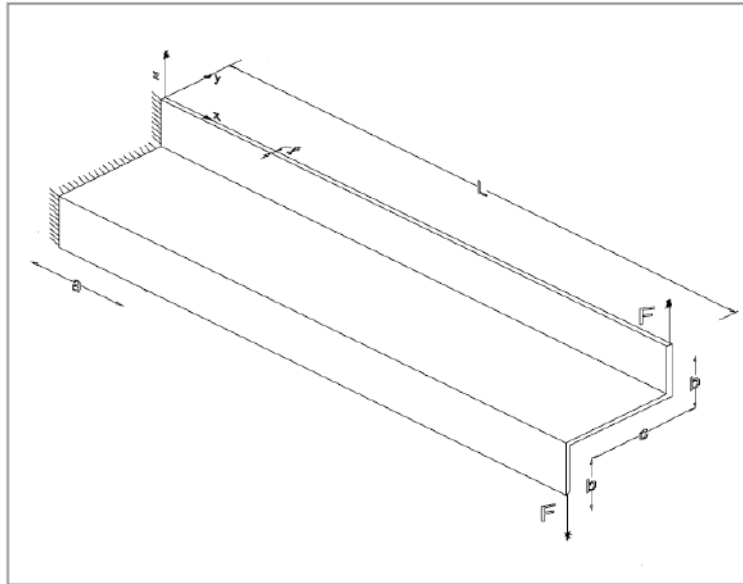


Fig. 1: Schema del problema

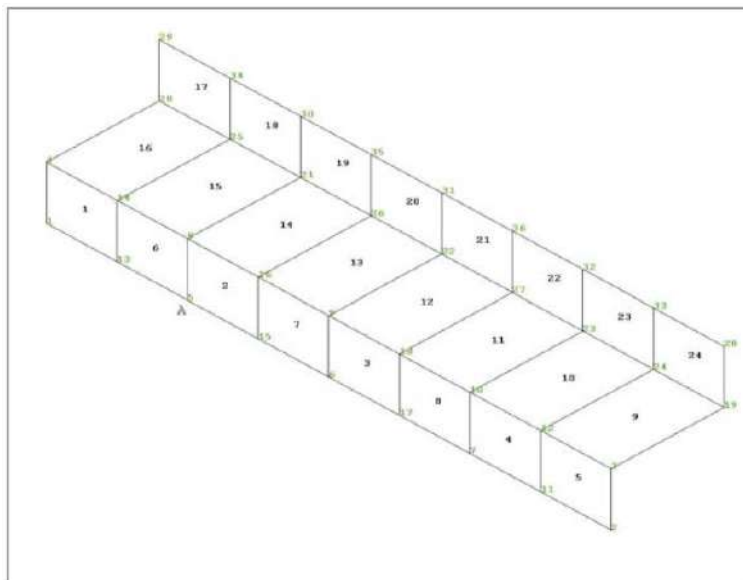


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Determinare il valore della tensione normale  $\sigma_x$  per la sezione trasversale posizionata, nel punto A, ad una distanza  $x=2.5$  m dall'origine. Le tensioni normali da lastra variano linearmente lungo lo spessore delle ali, mentre sono costanti lungo lo spessore dell'anima. Le tensioni tangenziali da lastra variano, invece, quadraticamente lungo le ali e linearmente sull'anima.

**Modello di calcolo:** Per la definizione del modello viene utilizzata una mesh uniforme costituita da 24 elementi e 36 nodi. La condizione d'incastro ad un estremo viene realizzata inserendo un vincolo esplicito tale da bloccare tutti i gradi di libertà dei nodi presenti per  $x=0$ .

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L = 10 \text{ m}$	
$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$a = 2.5 \text{ m}$	$F = 0.6 \text{ MN}$
$\nu = 0.3$	$b = 1.0 \text{ m}$	
	$c = 2.0 \text{ m}$	
	$t = 0.1 \text{ m}$	

**Soluzione teorica:**

La soluzione teorica fornisce:

$$\sigma_x = \frac{cb}{2} \frac{b+c}{2b+c} E g''(x);$$

e per  $x = 2.5$  m si ricava:

$$\sigma_x(x = 2.5) = 107.9 \text{ MPa} = 1100.27 \text{ kg/cm}^2$$

**Analisi dei risultati (\*):**

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (**)
$\sigma_x = 1100.27 \text{ kg/cm}^2$	1094.45	0.995

**Osservazioni:** L'analisi condotta evidenzia un'elevata corrispondenza tra il risultato teorico e quello fornito dall'elaborazione.

Il valore della tensione  $\sigma_x$  calcolato in **CDSWin** è la media dei corrispondenti valori  $\sigma_{x\text{-superiore}}$  e  $\sigma_{x\text{-inferiore}}$  del punto in esame (nodo 5).

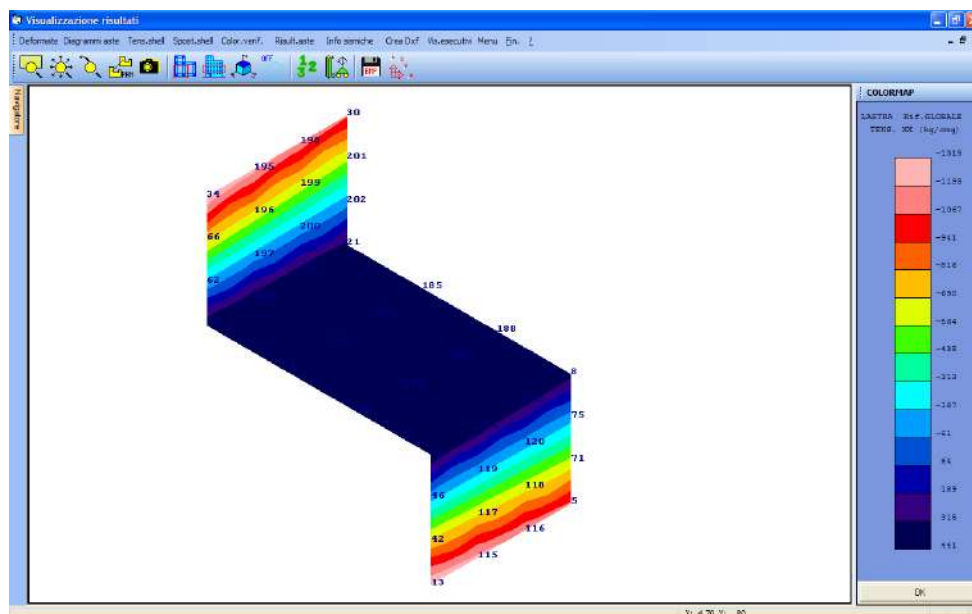


Fig. 1: Colormap tensioni

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.



## Test di verifica n°13

### Trave a mensola a sezione variabile

**Fonte di riferimento:** Crandall, Rif. [ 9 ]: An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY. 1959.

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Una trave a mensola di lunghezza  $l$  è caratterizzata da una sezione di larghezza  $t$  e di altezza variabile, in modo uniforme, da un valore  $d$ , in corrispondenza dell'estremo libero, ad un valore pari a  $3d$ , in corrispondenza dell'estremo incastrato. Come mostrato in fig. 1 , il sistema così descritto viene sottoposto nell'estremo libero all'azione della forza concentrata  $F$ .

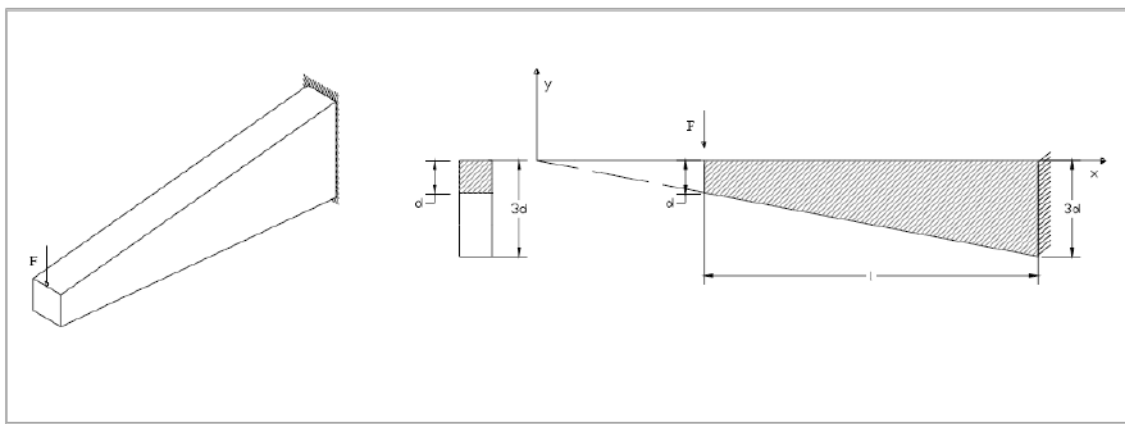


Fig. 1: Schema del problema

**Obiettivo:** Trascurando il peso della trave determinare il valore della tensione  $\sigma_{\max}$  in corrispondenza dell'estremo vincolato.

**Modello di calcolo:** La trave viene schematizzata mediante l'elemento *shell*. La rappresentazione del modello di calcolo comporta la discretizzazione di questo in una mesh di 15 elementi.

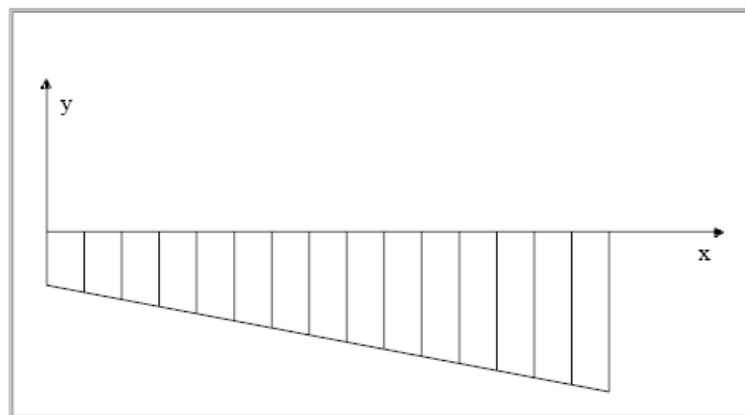


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

<i>Proprietà meccaniche</i>	<i>Proprietà geometriche</i>	<i>Carico</i>
	$L=50 \text{ in} = 1.27 \text{ m}$	
$E=30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$d= 3 \text{ in} = 7.62 \text{ cm}$	$F= 4000 \text{ lb} = 1.81 \text{ t}$
$\nu=0.0$	$3d= 9 \text{ in} = 22.86 \text{ cm}$	
	$t = 2 \text{ in} = 5.08 \text{ cm}$	

**Soluzione teorica:** La soluzione teorica fornisce:

$$\sigma_{\max} = 7407 \text{ psi} = 520.76 \text{ Kg / cm}^2$$

**Analisi dei risultati (\*):**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
$520.76 \text{ Kg / cm}^2$	$521 \text{ Kg / cm}^2$	$0.999$

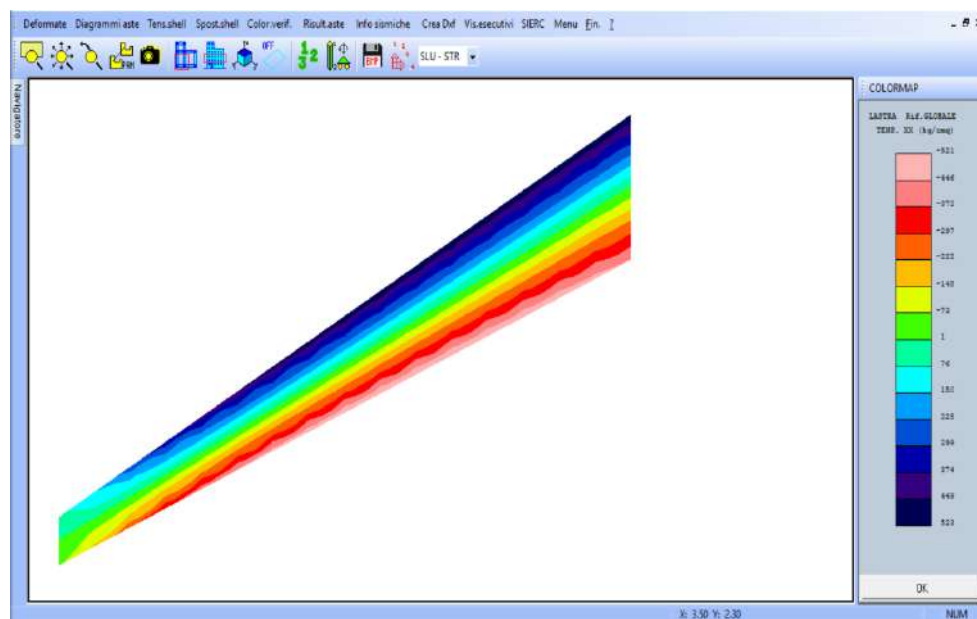


Fig. 3: Colormap tensioni

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°14

### Lastra rettangolare piana

**Fonte di riferimento:** A&C - Rif.[ 3 ] - Rif.[ 16 ]: Analisi e calcolo n° 8, Gen.-Mar. 2002

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Lo schema in fig. mostra una lastra rettangolare piana semplicemente appoggiata sui 4 vertici soggetta a moto di corpo rigido.

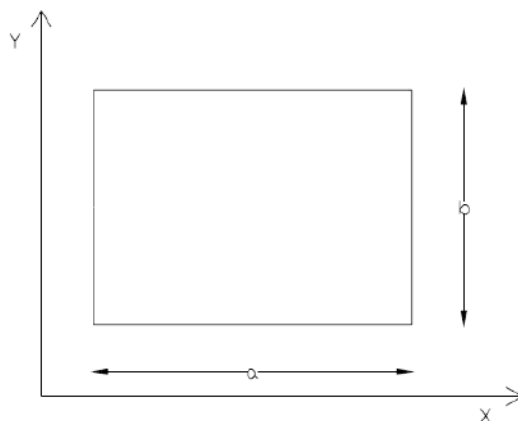


Fig. 1: Schema del problema

**Obiettivo:** Valutare il comportamento degli elementi bidimensionali sotto la condizione di moto rigido senza deformazioni.

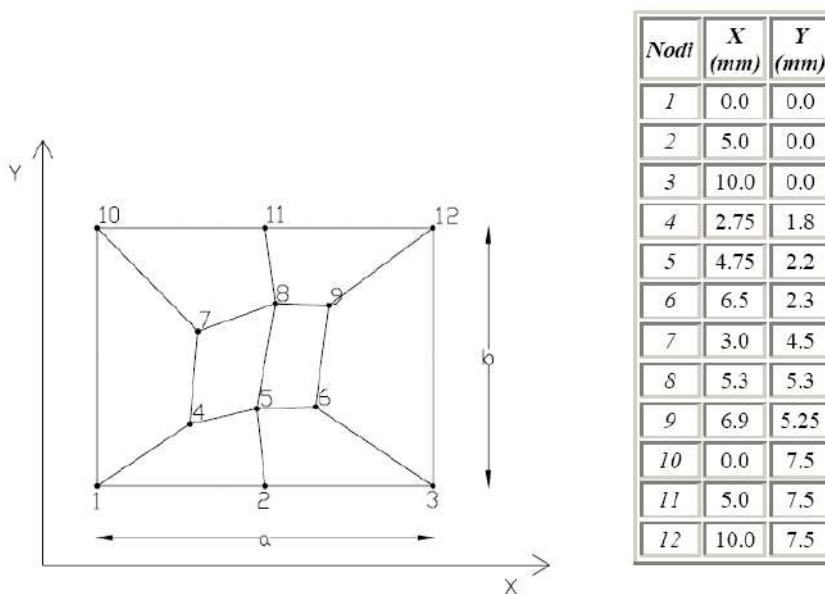


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Modello di calcolo:** Ai fini del calcolo l'elemento è stato suddiviso in 8 sub-elementi in maniera da assicurare che la forma interna sia irregolare. In corrispondenza dei quattro vertici perimetrali sono stati considerati degli appoggi semplici, mentre per tutti i nodi presenti sul contorno non è stato considerato alcun tipo di vincolo.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

<i>Proprietà meccaniche</i>	<i>Proprietà geometriche</i>
$E=2000000 \text{ Kg/cm}^2$	Larghezza, $a=100 \text{ cm}$
$\nu=0.3$	Altezza, $b=75 \text{ cm}$
	Spessore, $t=10 \text{ cm}$

Vengono esaminati, separatamente i risultati relativi a tre diversi casi di studio:

- **Caso 1:** moto di corpo rigido in direzione X  $\eta_x = 1 \text{ cm}$
- **Caso 2:** moto di corpo rigido in direzione Y  $\eta_y = 1 \text{ cm}$
- **Caso 3:** moto di rotazione nel piano xy  $\phi_{xy} = 45^\circ$

e per ciascuno di essi si valutano i valori max e min delle componenti delle tensioni

**Caso n°1**

$\eta_x = 1 \text{ cm}$

**Risultati:** La soluzione teorica prevede che:

- per i moti di corpo rigido tutti gli spostamenti dei nodi interni all'elemento bidimensionale definito risultino uguali a quelli applicati al contorno;
- L'elemento deve essere privo di tensioni e di deformazioni:

Utilizzando i dati assegnati, si sono ottenuti i seguenti risultati:

<i>Nodi</i>	<i>Soluzione teorica (mm)</i>	<i>CDSWin (mm)</i>	<i>Ratio <sup>(*)</sup></i>
1	10.0	10.0	1.000
2	10.0	10.0	1.000
3	10.0	10.0	1.000
4	10.0	10.0	1.000
5	10.0	10.0	1.000
6	10.0	10.0	1.000
7	10.0	10.0	1.000
8	10.0	10.0	1.000
9	10.0	10.0	1.000
10	10.0	10.0	1.000
11	10.0	10.0	1.000
12	10.0	10.0	1.000

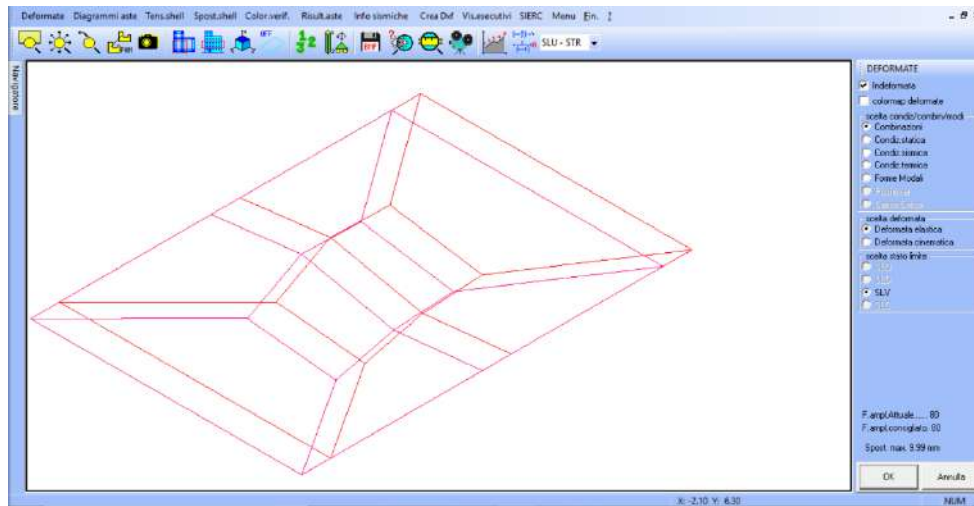


Fig. 3: Diagramma degli spostamenti

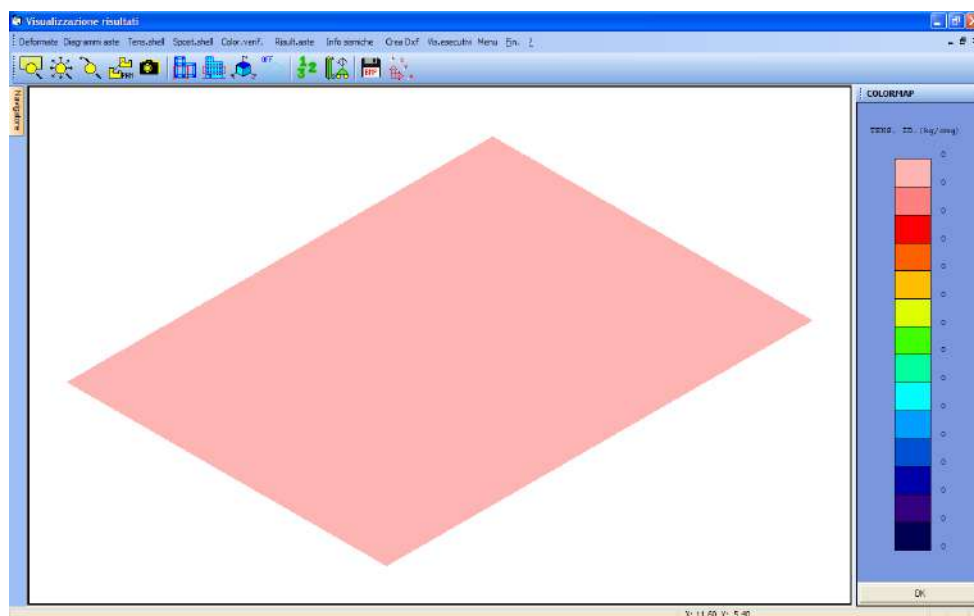


Fig. 4: Colormap tensioni

**Caso n°2** $\eta_y = 1 \text{ cm}$ **Risultati:** Idem caso 1);

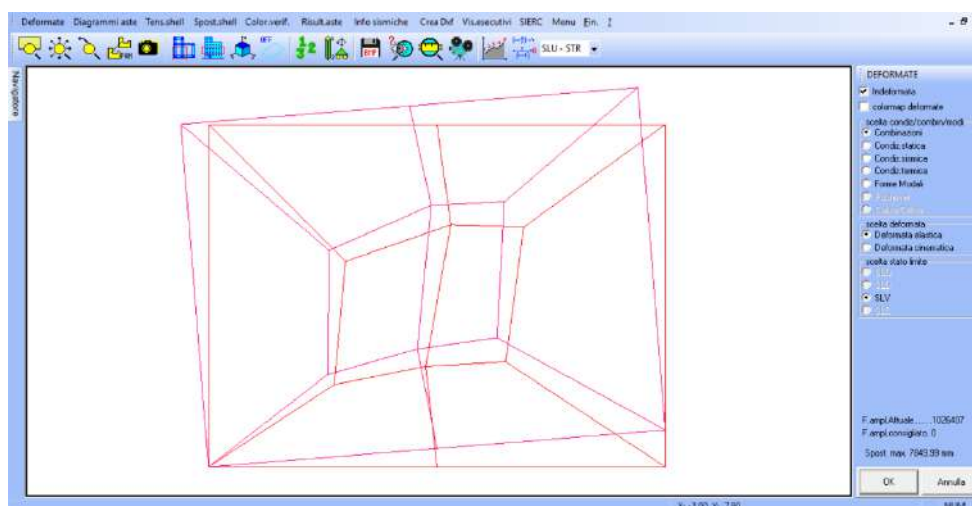
Utilizzando i dati assegnati, si sono ottenuti i seguenti risultati:

Nodi	Soluzione teorica (mm)	CDSWin (mm)	Ratio (*)
1	10.0	10.0	1.000
2	10.0	10.0	1.000
3	10.0	10.0	1.000
4	10.0	10.0	1.000
5	10.0	10.0	1.000
6	10.0	10.0	1.000
7	10.0	10.0	1.000
8	10.0	10.0	1.000
9	10.0	10.0	1.000
10	10.0	10.0	1.000
11	10.0	10.0	1.000
12	10.0	10.0	1.000

**Caso n°3** $\phi_{xy} = 45^\circ$ **Risultati:** La soluzione teorica prevede che:

- a) per i moti di corpo rigido tutti gli spostamenti dei nodi interni all'elemento bidimensionale definito risultino coerenti con quelli applicati al contorno, e quindi la forma rettangolare dell'elemento deve essere mantenuta anche dopo aver applicato la rotazione;

Utilizzando i dati assegnati, si sono ottenuti i seguenti risultati:



(\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°15

### Flessione in una piastra circolare

**Fonte di riferimento:** Cremonese, Rif. [ 10 ]: Manuale Ingegneria Civile, ESAC, SEZ. II pag. 114 e succ.

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Una piastra circolare sottile di raggio  $a$  e spessore  $t$  è soggetta a diverse condizioni di vincolo e di carico.

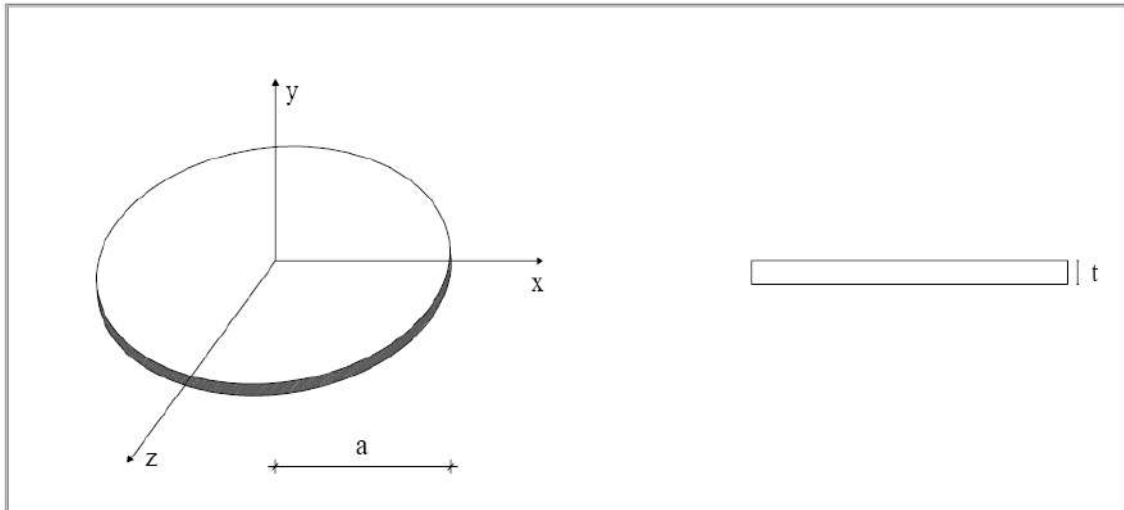


Fig. 1: Schema del problema

**Obiettivo:** Determinare l'abbassamento  $w$  in corrispondenza del centro della piastra per ciascuno dei seguenti casi:

- a) Carico uniformemente distribuito  $q_0$  e contorno incastrato;
- b) Carico concentrato  $P$  in corrispondenza del centro della piastra e contorno incastrato;
- c) Carico uniformemente distribuito  $q_0$  e contorno semplicemente appoggiato;

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

<i>Proprietà meccaniche</i>	<i>Proprietà geometriche</i>	<i>Carico</i>
$E=2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 1.5 \text{ m}$	$P = 2 \text{ t}$
$\nu = 0.3$	$t = 0.03 \text{ m}$	$q_0 = 10 \text{ t/m}^2$

**Modello di calcolo:** Nei tre casi oggetto dello studio il modello di calcolo viene ottenuto discretizzando la piastra mediante una mesh costituita dall'insieme di 150 elementi.

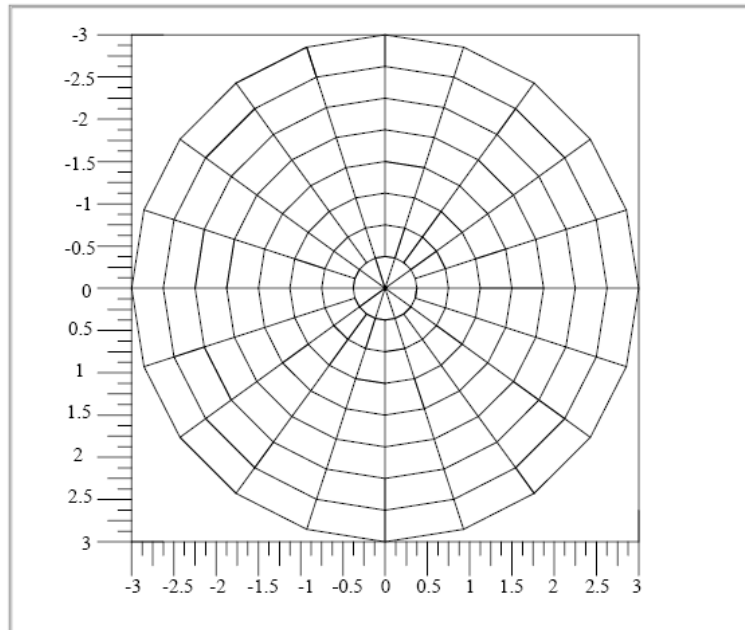
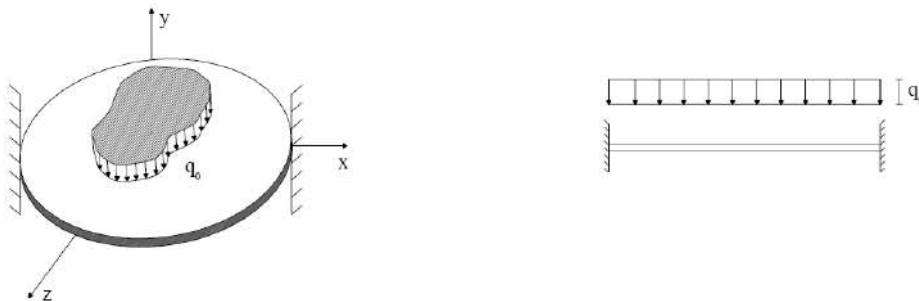


Fig. 2: Rappresentazione del modello di calcolo

**Caso a) :**

**La piastra circolare incastrata al contorno e sollecitata da un carico uniforme.**



**Soluzione teorica:** E' noto che per questa condizione di carico la funzione abbassamento  $w(r)$  assume la seguente forma:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{64B} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2; \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$m_r = -\frac{q_0 a^2}{16} \left[ \frac{r^2}{a^2} (3 + \nu) - 1 - \nu \right];$$

$$m_\nu = -\frac{q_0 a^2}{16} \left[ \frac{r^2}{a^2} (1 + 3\nu) - 1 - \nu \right];$$

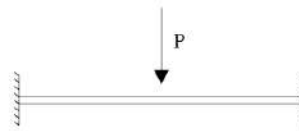
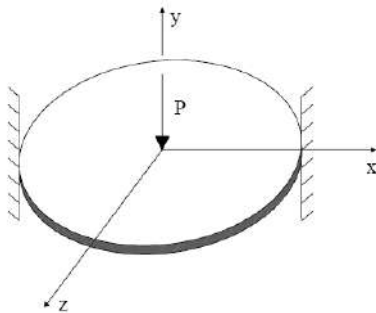


**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> (*)
$w_{max} = w(r=0) = 15.23 \text{ mm}$	$15.49 \text{ mm}$	$1.017$

**Caso b) :**

*La piastra circolare incastrata al contorno e sollecitata da una forza concentrata nel centro;*



**Soluzione teorica:** E' noto che per questa condizione di carico la funzione abbassamento  $w(r)$  assume la seguente forma:

$$w(r) = P \frac{a^2}{16\pi B} \left( 2 \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} + 1 \right); \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$m_r = -P \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + (1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right];$$

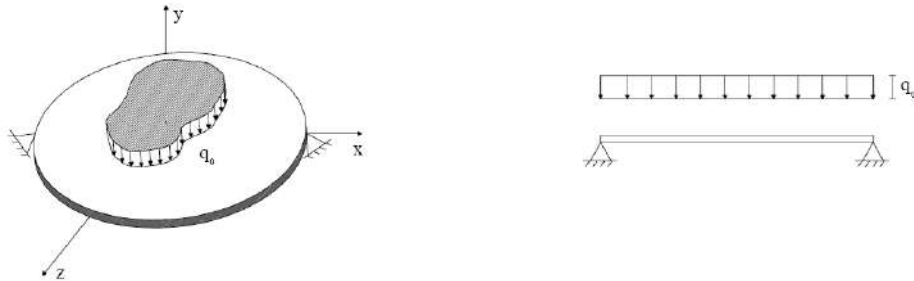
$$m_{\varphi} = -P \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + (1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right];$$

**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> (*)
$w_{max} = w(r=0) = 1.725 \text{ mm}$	$1.780 \text{ mm}$	$1.032$

**Caso c) :**

**La piastra circolare appoggiata al contorno e sollecitata da un carico uniforme;**



**Soluzione teorica:** E' noto che per questa condizione di carico la funzione abbassamento  $w(r)$  assume la seguente forma:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{64B} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} - \frac{r^2}{a^2}\right); \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$m_r = \frac{q_0 a^2}{16} (3+\nu) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right);$$

$$m_\theta = \frac{q_0 a^2}{16} \left[3+\nu - (1+3\nu) \frac{r^2}{a^2}\right]$$

**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (*)</i>
$w_{max} = w(r=0) = 62.09 \text{ mm}$	65.247 mm	1.051

(\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°16

La piastra rettangolare incastrata al contorno e soggetta ad un carico uniformemente ripartito

**Fonte di riferimento:** Cremonese: “Manuale di ingegneria civile” Ed. 1982, pg. 113.

**Tipo di analisi:** Analisi Statica Lineare

**Schema di calcolo:** Una piastra rettangolare, di larghezza  $a$  e lunghezza  $b$ , ha uno spessore costante  $h$  ed è incastrata lungo i 4 lati. Il carico applicato consiste in una pressione  $q_0$  uniformemente ripartita sull'intera superficie.

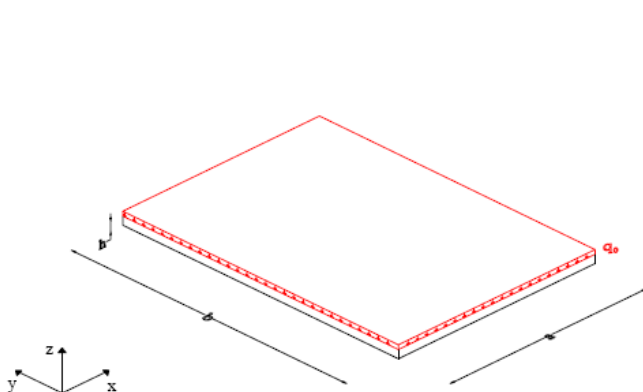


Fig. 1: Schema del problema

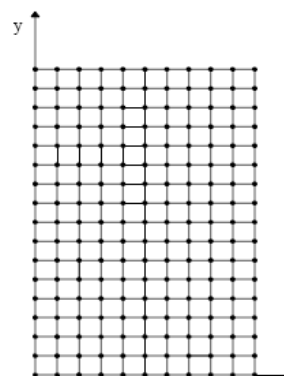


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E = 1000000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 100 \text{ cm}$	
$\nu = 0.2$	$b = 160 \text{ cm}$	$q_0 = 1 \text{ t/m}^2$
	$h = 1 \text{ cm}$	

**Modello di calcolo:** Il modello viene realizzato utilizzando una griglia formata da un totale di 100 elementi. In corrispondenza dei bordi perimetrali della piastra vengono inseriti dei vincoli esterni che, simulando l'incastro, bloccano tutti i gdl.

**Obiettivo:** Determinare l'abbassamento  $w_c$  e lo stato tensionale massimo in mezzeria della piastra (nodo 7).

**Soluzione teorica:** L'abbassamento cercato è fornito dalla seguente relazione:

$$w_c = C_f \frac{q_0 \times a^4}{D}$$

dove:

$$C_f (a/b) = 0.0023$$

$$D = \text{rigidezza flessionale della piastra} = \frac{E \times h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Con i dati a disposizione:

$$w_c = 2.65 \text{ mm}$$

Per quanto attiene allo stato tensionale, si calcolano i momenti in campata:

$$M_{x-c} = (C_1 + \nu \cdot C_2) \cdot q_0 \cdot a^2$$

$$M_{y-c} = (C_2 + \nu \cdot C_1) \cdot q_0 \cdot a^2$$

dove:

$$C_1 (a/b) = 0.0358$$

$$C_2 (a/b) = 0.0086$$

Con i dati a disposizione:

$$\sigma_{x-c} = 225 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{y-c} = 95 \text{ kg/cm}^2$$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:**

<i>Soluzione teorica (mm)</i>	<i>CDSWin (mm)</i>	<i>Ratio <sup>(**)</sup></i>
$w_c = 2.650 \text{ mm}$	$2.652 \text{ mm}$	$1.001$
$\sigma_x = 225 \text{ Kg/cm}^2$	$227.4 \text{ Kg/cm}^2$	$1.011$
$\sigma_y = 95 \text{ Kg/cm}^2$	$93.5 \text{ Kg/cm}^2$	$0.984$

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°17

### Carico critico di una trave piana

**Fonte di riferimento:** Qualsiasi testo di Scienza delle Costruzioni

**Tipo di analisi:** Non linearità geometrica

**Schema di calcolo:** Una trave ad asse rettilineo è caratterizzata da una sezione HEA100 e da una lunghezza  $l$ . Il sistema così descritto, variamente vincolato, viene sottoposto all'azione di un carico assiale  $P$  diretto lungo l'asse della trave.

**Modello di calcolo:** Per la rappresentazione del sistema si procede alla suddivisione dell'asta in 4 elementi. Alle estremità vengono inseriti vincoli esterni espliciti atti a simulare esclusivamente i movimenti consentiti nel piano dal vincolo considerato.

**Obiettivo:** Con riferimento alla struttura assegnata determinare il valore del carico critico per ciascuna delle seguenti condizioni di vincolo assegnate.

- Trave incastrata alla base e libera in testa;
- Trave incernierata alla base e con un carrello in testa;
- Trave incastrata alla base e con un carrello in testa;
- Trave incastrata alla base e con un incastro scorrevole in testa;

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
	$l = 3 \text{ m}$
$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$h = 96 \text{ mm}$
	$b = 100 \text{ mm}$

**Caso a) :**

**Trave incastrata alla base e libera in testa**

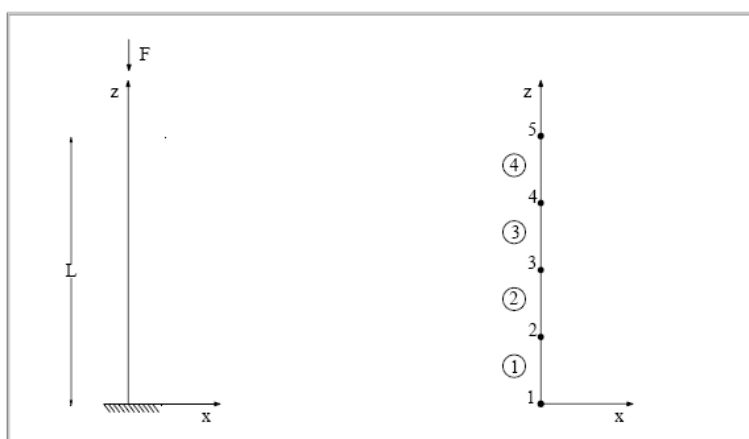


Fig. 1: Schema del problema e del modello di calcolo

**Soluzione teorica:** Per una trave piana semplicemente incastrata ad un estremo l'espressione che fornisce il carico critico teorico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

Nel caso in esame:

$$P_{cr} = 7.703 \text{ t}$$

**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> <sup>(*)</sup>
$P_{cr} = 7.703 \text{ t}$	$P \cdot \text{molt}_{cr} = 0.1 \cdot 77.04 = 7.704 \text{ t}$	1.000

**Caso b) :**

*Trave incernierata alla base e con un carrello in testa*

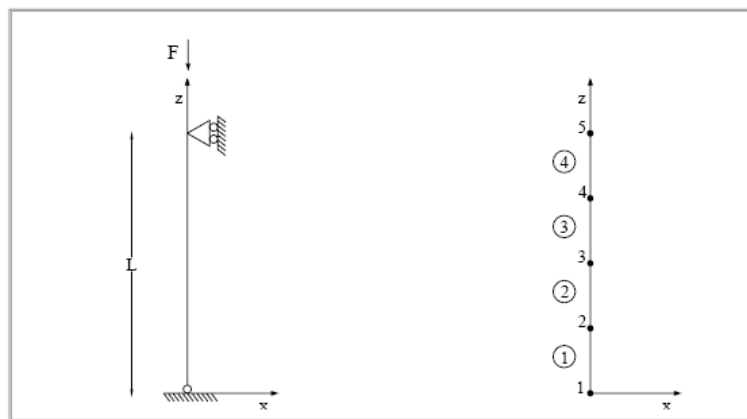


Fig. 2: Schema del problema e del modello di calcolo

**Soluzione teorica:** Per la trave piana riportata in fig.3 l'espressione che fornisce il carico critico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

nel caso in esame:

$$P_{cr} = 30.815 \text{ t}$$

**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> <sup>(*)</sup>
$P_{cr} = 30.815 \text{ t}$	$P \cdot \text{molt}_{cr} = 1 \cdot 30.83 = 30.830 \text{ t}$	1.001

**Caso c) :**

**Trave incastrata alla base e con un carrello in testa;**

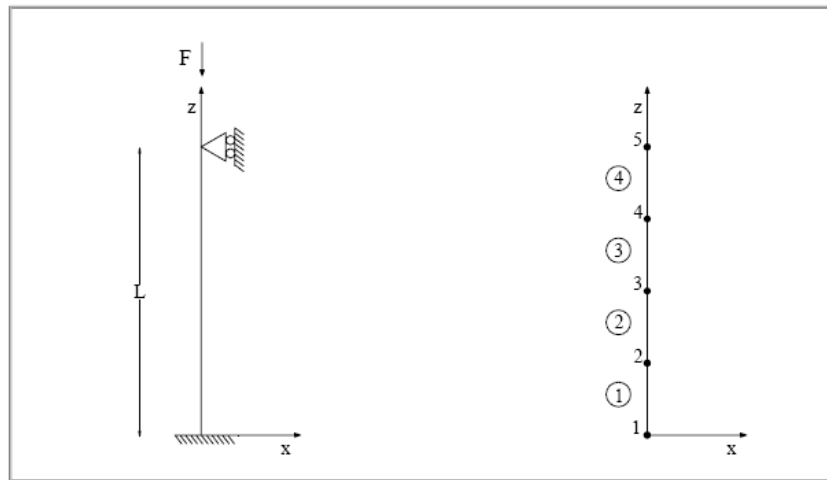


Fig. 3: Schema del problema e del modello di calcolo

**Soluzione teorica:** Per la trave piana riportata in fig.3 l'espressione che fornisce il carico critico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699L)^2}$$

nel caso in esame:

$$P_{cr} = 63.068 \text{ t}$$

**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> (*)
$P_{cr} = 63.068 \text{ Kg}$	$P \cdot \text{molt}_{cr} = 1 \cdot 63.17 = 63.170 \text{ Kg}$	1.002

**Caso d) :**

**Trave incastrata alla base e con un incastro scorrevole in testa**

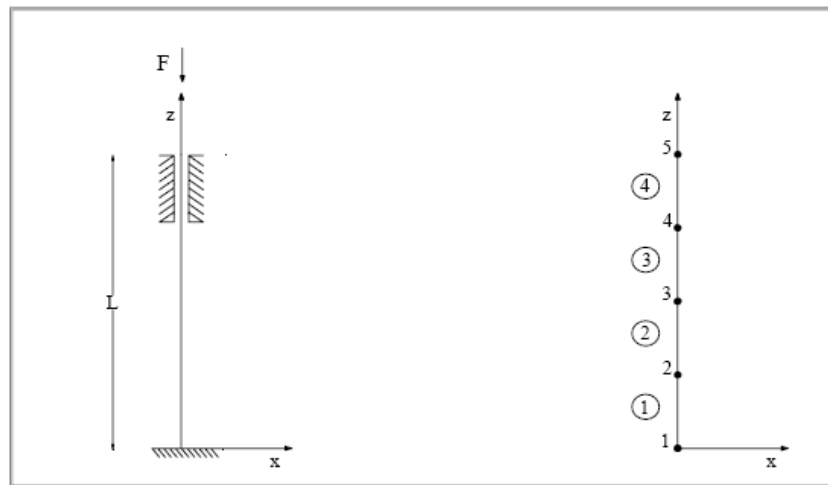


Fig. 4: Schema del problema e del modello di calcolo

**Soluzione teorica:** Per la trave piana riportata in fig.3 l'espressione che fornisce il carico critico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$$

nel caso in esame:

$$P_{cr} = 123.260 \text{ Kg}$$

**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> (*)
$P_{cr} = 123.260 \text{ Kg}$	$P \cdot molt_{cr} = 1 \cdot 124.18 = 124.180 \text{ Kg}$	1.007

(\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.



## Test di verifica n°18

### Frequenze naturali di vibrazione in una trave appoggiata- appoggiata

**Fonte di riferimento:** Ray, W. Clough, Joseph Penzien, Rif. [ 11 ]: Dynamics of Structures, Mc Graw-Hill Book Company, cap. 18

**Tipo di analisi:** Analisi Dinamica Modale

**Schema di calcolo:** Una trave a sezione rettangolare è isostaticamente vincolata mediante due appoggi semplici ed è soggetta esclusivamente all'azione del proprio peso.

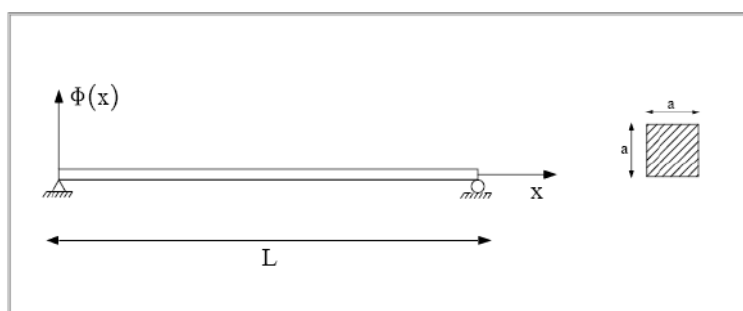


Fig. 1: Schema del problema

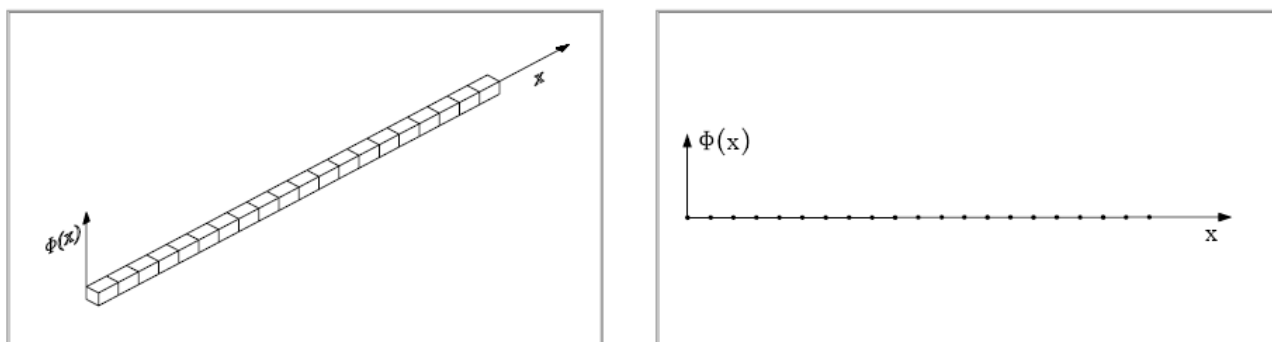


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Per il sistema assegnato determinare i primi tre modi di vibrare.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 30 \text{ cm}$	$P_p = 706.5 \text{ Kg/m}$
	$L = 10 \text{ m}$	

**Modello di calcolo:** Il sistema assegnato viene suddiviso in un insieme di 20 elementi. In corrispondenza del nodo iniziale e di quello finale vengono inseriti due vincoli esterni espliciti che bloccano tutti i gdl ad eccezione della rotazione attorno all'asse y. Per i restanti nodi vengono consentite, esclusivamente, la rotazione attorno all'asse y e le traslazioni nel piano.

**Analisi dei risultati:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> <sup>(**)</sup>
$\omega_1 = 43.79 \text{ rad/sec}$	$43.79 \text{ rad/sec}$	$1.000$
$\omega_2 = 175.16 \text{ rad/sec}$	$175.14 \text{ rad/sec}$	$1.000$
$\omega_3 = 394.11 \text{ rad/sec}$	$394.06 \text{ rad/sec}$	$1.000$

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°19

### Frequenze naturali di vibrazione in una trave a mensola

**Fonte di riferimento:** Ray, W. Clough, Joseph Penzien, Rif. [ 11 ]: Dynamics of Structures, Mc Graw-Hill Book Company, cap. 1

**Tipo di analisi:** Analisi Dinamica Modale

**Schema di calcolo:** Si consideri la trave prismatica dell'esercizio precedente sostituendo lo schema statico in modo tale che risulti incastrata ad un estremo e libera all'altro.

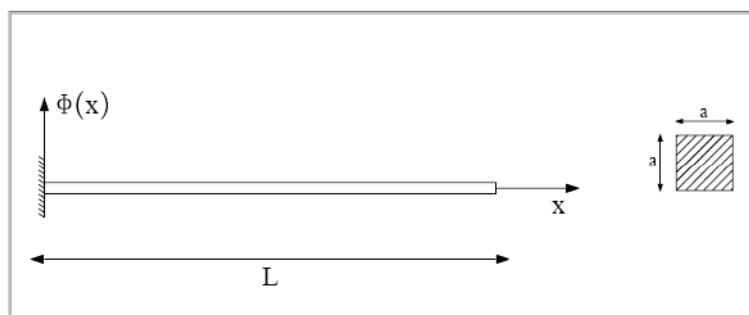


Fig. 1: Schema del problema

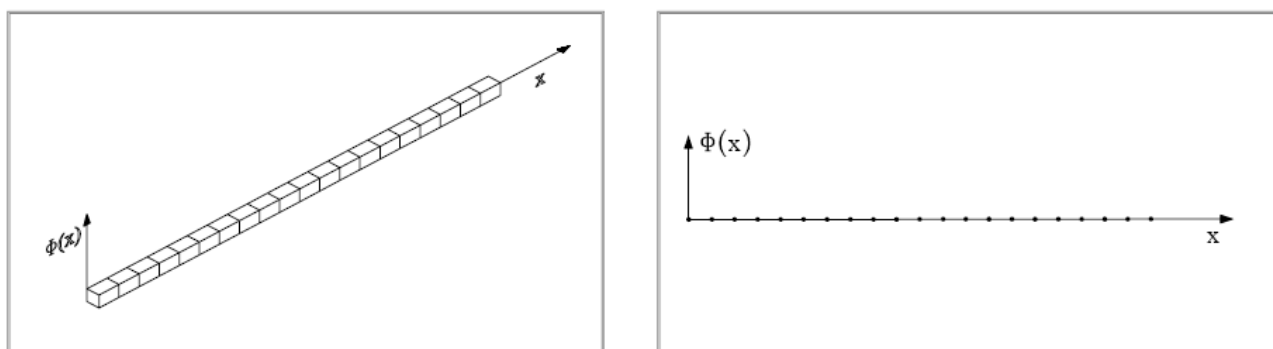


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Per il sistema assegnato determinare i primi tre modi di vibrare.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 30 \text{ cm}$	$P_p = 706.5 \text{ Kg/m}$
	$L = 10 \text{ m}$	

**Modello di calcolo:** Il sistema assegnato viene suddiviso in un insieme di 20 elementi. In corrispondenza del nodo iniziale viene inserito un vincolo esterno tale da bloccare tutti i gdl. Per i restanti nodi vengono consentite, esclusivamente, la rotazione attorno all'asse y e le traslazioni nel piano.

**Analisi dei risultati:**

<b><i>Soluzione teorica</i></b>	<b><i>CDSWin</i></b>	<b><i>Ratio</i> <sup>(**)</sup></b>
$\omega_1 = 15.60 \text{ rad/sec}$	$15.58 \text{ rad/sec}$	$0.999$
$\omega_2 = 97.76 \text{ rad/sec}$	$97.37 \text{ rad/sec}$	$0.996$
$\omega_3 = 273.76 \text{ rad/sec}$	$271.94 \text{ rad/sec}$	$0.993$

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°20

### Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore semplice

**Fonte di riferimento:** Thomson, Rif. [ 12 ]: Vibration Theory and Applications, pg. 6, ex. 1.2-2

**Tipo di analisi:** Analisi Dinamica Modale

**Schema di calcolo:** Si consideri il sistema dinamico ad un solo gdl mostrato nella fig. 1. La massa totale di questo sistema è concentrata ad un estremo della molla, mentre l'altro viene bloccato.

La resistenza elastica allo spostamento è fornita dalla molla, priva di massa e di rigidezza  $K$ .

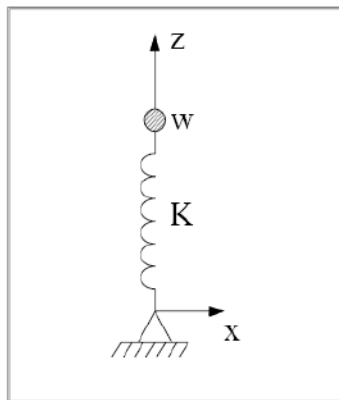


Fig. 1: Schema del problema

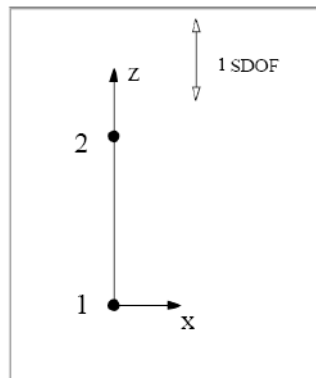


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Per il sistema assegnato valutare la frequenza naturale di vibrazione.

**Modello di calcolo:** Per la rappresentazione del modello di calcolo è sufficiente inserire 2 nodi in corrispondenza degli estremi della molla. La lunghezza della molla è arbitraria ed alla massa  $w$  viene consentito solo 1 gdl lungo la direzione dell'asse della molla.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Carico
$K=48 \text{ lb/in} = 857.18 \text{ Kg/m}$	$9.81 \text{ m/s}^2$
$w = 2.5 \text{ lb} = 0.00113 \text{ t}$	

**Soluzione teorica:**

Utilizzando i dati assegnati, si trova:

$$\omega = 13.701 \text{ cycle/sec} = 86.085 \text{ rad/sec}$$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:**

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio <sup>(**)</sup></i>
$\omega = 86.085 \text{ rad/sec}$	$86.255 \text{ rad/sec (3}^\circ\text{modo verticale)}$	$1.001$

**Osservazioni:** Per simulare la molla, in **CDSWin**, si è reso necessario inserire un'asta di caratteristiche meccanico-geometriche tali che la rigidezza risultante fosse identica a quella assegnata.

Ricordando che:

$$K = EA/L$$

ponendo:

$$A = 100 \text{ cm}^2$$

$$L = 100 \text{ cm},$$

e considerando  $K=857.18 \text{ Kg/m}$ , si trova:

$$E = KL/A = 8.57 \text{ kg/cm}^2$$

Per simulare la presenza della massa si è inserita una forza concentrata in corrispondenza del nodo 2, diretta verso il basso lungo la direzione dell'asse z e di entità pari alla massa w considerata.

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°21

### Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore con due masse in serie

**Tipo di analisi:** Analisi Dinamica Modale

**Schema di calcolo:** Si consideri l'oscillatore a due gradi di libertà mostrato in fig.1; esso risulta costituito da 3 molle, prive di massa, di rigidezza  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3=K_1$ , e da due masse concentrate  $m_1=m_2=m$  poste in serie.

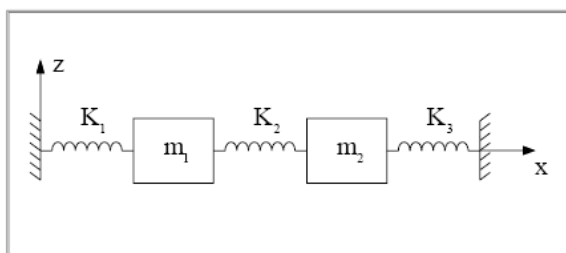


Fig. 1: Schema del problema

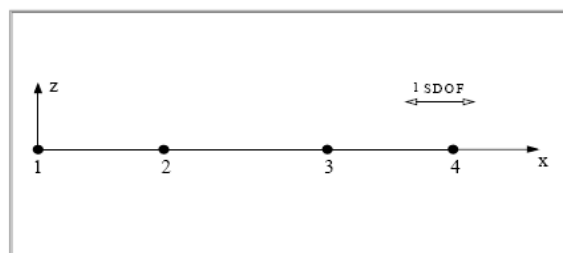


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Per il sistema assegnato valutare la frequenza naturale di vibrazione.

**Modello di calcolo:** Per la rappresentazione del modello di calcolo è sufficiente inserire 4 nodi, 2 in corrispondenza degli estremi della molla e 2 in corrispondenza delle masse concentrate. La lunghezza delle molle è arbitraria ed alle masse  $m_1$  ed  $m_2$  viene consentito solo 1 gdl lungo la direzione dell'asse delle molle.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Carico
$K_1=K_3=K=200\text{ Kg/cm}$	
$K_2=4K=800\text{ Kg/cm}$	$g=981\text{ cm/s}^2$
$m_1=m_2=1\text{ Kg-s}^2/\text{cm}$	

Nel caso in esame utilizzando i dati assegnati, si trova:

$$\omega_1 = 14.142\text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = 42.426\text{ rad/sec}$$

**Analisi dei risultati:**

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (**)
14.142 rad/sec	14.142 rad/sec	1.000
42.426 rad/sec	42.426 rad/sec	1.000

**Osservazioni:** Per simulare le tre molle, in CDSWin, si è reso necessario inserire tre aste di caratteristiche meccanico-geometriche tali che le rispettive rigidezze risultanti fosse identiche a quelle assegnate.

Ricordando che:

$$K=EA/L$$

si è posto:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A = 100 \text{ cm}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L = 100 \text{ cm},$$

e considerando  $K_1 = K_3 = K = 200 \text{ Kg/cm}$ , si trova:

$$E_1 = E_3 = E = KL/A = 200 \text{ kg/cm}^2$$

analogamente, considerando  $K_c = 800 \text{ Kg/cm}$ , si trova:

$$E = 800 \text{ kg/cm}^2$$

Per simulare la presenza delle due masse, si sono inserite due forze concentrate in corrispondenza dei nodi 2 e 3, entrambe dirette verso il basso lungo la direzione dell'asse z e di entità pari alla massa m considerata.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.



## Test di verifica n°22

### Analisi in frequenza di una piastra rettangolare

**Fonte di riferimento:** Blevins, Robert D., Rif. [ 13 ]: "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," Van Nostrand Reinhold Company, 1979, pg. 258.

**Tipo di analisi:** Analisi Dinamica Modale

**Schema di calcolo:** Una piastra rettangolare, di larghezza  $a$  e lunghezza  $b$ , ha uno spessore costante  $t$  ed è semplicemente appoggiata lungo i 4 lati.

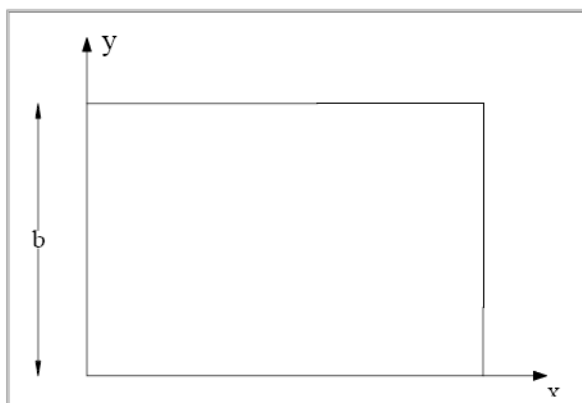


Fig. 1: Schema del problema

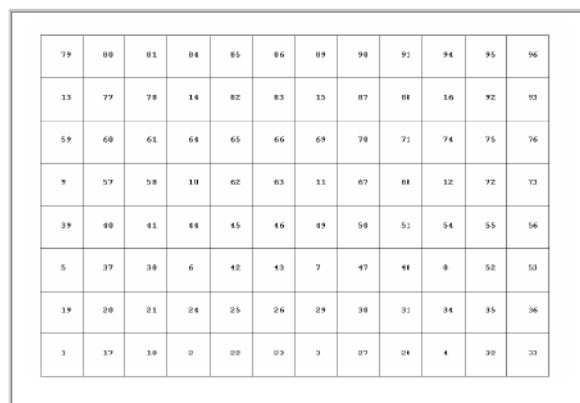


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Analizzare il comportamento dinamico dell'elemento piastra.

**Modello di calcolo:** Per la schematizzazione del modello di calcolo si fa riferimento ad una mesh formata da 96 elementi, ognuno composto da una mesh (3x3). In corrispondenza dei bordi perimetrali vengono inseriti dei vincoli che simulano gli appoggi.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 45 \text{ in} = 114.3 \text{ cm}$
$\nu = 0.3$	$b = 30 \text{ in} = 76.2 \text{ cm}$
$\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$	$t = 0.2 \text{ in} = 0.508 \text{ cm}$

Utilizzando i dati assegnati, si trova:

$\omega_1 = 30.94 \text{ cycle/sec} = 194.30 \text{ rad/sec}$
$\omega_2 = 59.49 \text{ cycle/sec} = 373.59 \text{ rad/sec}$
$\omega_3 = 95.18 \text{ cycle/sec} = 597.73 \text{ rad/sec}$
$\omega_4 = 107.1 \text{ cycle/sec} = 672.58 \text{ rad/sec}$
$\omega_5 = 123.7 \text{ cycle/sec} = 776.83 \text{ rad/sec}$
$\omega_6 = 171.3 \text{ cycle/sec} = 1075.76 \text{ rad/sec}$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:**

<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(**)</sup></b>
194.30 rad/sec	194.18 rad/sec	0.999
373.59 rad/sec	373.00 rad/sec	0.998
597.73 rad/sec	596.85 rad/sec	0.999
672.58 rad/sec	670.84 rad/sec	0.997
776.83 rad/sec	774.02 rad/sec	0.996
1075.76 rad/sec	1069.02 rad/sec	0.994

Raffittendo la mesh fino a definire una maglia composta da 3456 elementi, si ottengono i seguenti risultati:

<b>Soluzione teorica</b>	<b>CDSWin</b>	<b>Ratio <sup>(**)</sup></b>
194.30 rad/sec	194.24 rad/sec	1.000
373.59 rad/sec	373.27 rad/sec	0.999
597.73 rad/sec	597.05 rad/sec	0.999
672.58 rad/sec	671.41 rad/sec	0.998
776.83 rad/sec	775.05 rad/sec	0.998
1075.76 rad/sec	1071.40 rad/sec	0.996

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°23

### Analisi in frequenza di una piastra sottile romboidale

**Fonte di riferimento:** Rif. [ 14 ]: The STANDARD NAFEMS Benchmarks, TNSB, Rev. 3, 5 October, 1990

**Tipo di analisi:** Analisi Dinamica Modale

**Schema di calcolo:** Una piastra sottile romboidale, con i quattro lati uguali di lunghezza  $L$ , ha uno spessore costante  $h$  ed è incastrata lungo il contorno.

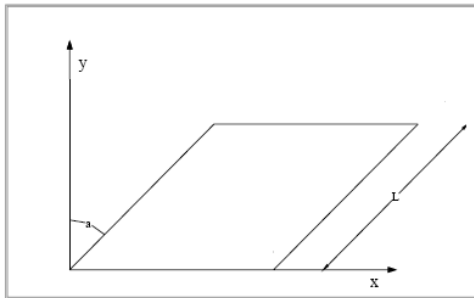


Fig. 1: Schema del problema

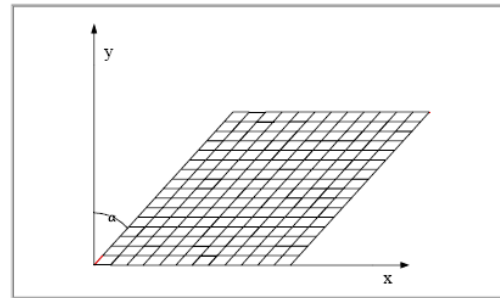


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

**Obiettivo:** Analizzare il comportamento dinamico dell'elemento piastra.

**Modello di calcolo:** Per la schematizzazione del modello di calcolo si fa riferimento ad una griglia formata da 192 elementi. In corrispondenza dei bordi perimetrali vengono inseriti dei vincoli incastro.

**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
$E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$L = 10 \text{ m}$
$\nu = 0.3$	$h = 0.05 \text{ m}$
$\rho = 8000 \text{ Kg/m}^3$	$\alpha = 45^\circ$

**Soluzione teorica:** Utilizzando i dati assegnati, si trova:

$\omega_1 = 7.938 \text{ cycle/sec} = 49.85 \text{ rad/sec}$
$\omega_2 = 12.835 \text{ cycle/sec} = 80.60 \text{ rad/sec}$
$\omega_3 = 17.941 \text{ cycle/sec} = 112.70 \text{ rad/sec}$
$\omega_4 = 19.133 \text{ cycle/sec} = 120.15 \text{ rad/sec}$
$\omega_5 = 24.009 \text{ cycle/sec} = 150.77 \text{ rad/sec}$
$\omega_6 = 27.922 \text{ cycle/sec} = 175.35 \text{ rad/sec}$

**Analisi dei risultati <sup>(\*)</sup>:**

<b><i>Soluzione teorica</i></b>	<b><i>CDSWin</i></b>	<b><i>Ratio <sup>(**)</sup></i></b>
<i>49.85 rad/sec</i>	<i>48,72 rad/sec</i>	<i>0. 977</i>
<i>80.60 rad/sec</i>	<i>79,01 rad/sec</i>	<i>0. 980</i>
<i>112.70 rad/sec</i>	<i>111,12 rad/sec</i>	<i>0. 986</i>
<i>120.15 rad/sec</i>	<i>116,20 rad/sec</i>	<i>0. 967</i>
<i>150.77 rad/sec</i>	<i>148.67 rad/sec</i>	<i>0. 986</i>
<i>175.35 rad/sec</i>	<i>168,50 rad/sec</i>	<i>0. 961</i>

(\*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(\*\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

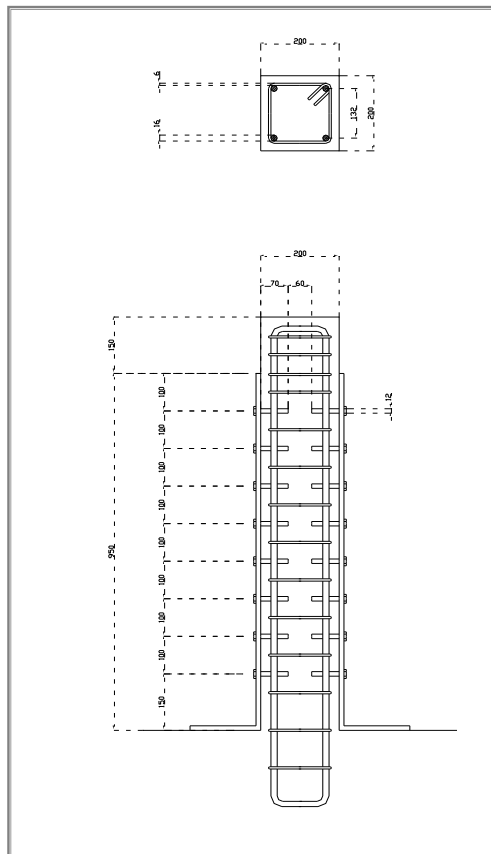
## Test di verifica n°24

### Elemento mensola a sezione costante

**Fonte di riferimento:** Dati sperimentali

**Tipo di analisi:** Analisi Statica non Lineare.

**Schema di calcolo:** Sia dato un pilastro a sezione quadrata, isostaticamente vincolato con un incastro alla base e libero in corrispondenza dell'altro estremo, di cui è nota la distribuzione di armatura all'interno della sezione stessa. La struttura così definita viene sottoposta all'azione di un carico assiale noto ed uno orizzontale, applicato in testa e monotonicamente crescente.



**Modello di calcolo:** Ai fini dell'analisi è sufficiente modellare il sistema come unico elemento monodimensionale. I nodi vengono inseriti agli estremi dell'elemento. In corrispondenza del nodo n°1 si procede all'inserimento di un vincolo esterno di tipo incastro, mentre in corrispondenza del nodo n°2 si inserisce un carico nodale  $F_z = -36t$ .

**Obiettivo:** L'analisi si propone di illustrare la non linearità della relazione carico spostamento e, quindi, di verificare il comportamento dell'elemento asta, soggetta all'azione dei carichi gravitazionali e ad una distribuzione di forze orizzontali monotonicamente crescente, confrontando la soluzione sperimentalmente ottenuta con quella fornita dall'analisi di CDSWin.

### *Caratteristiche meccanico-geometriche:*

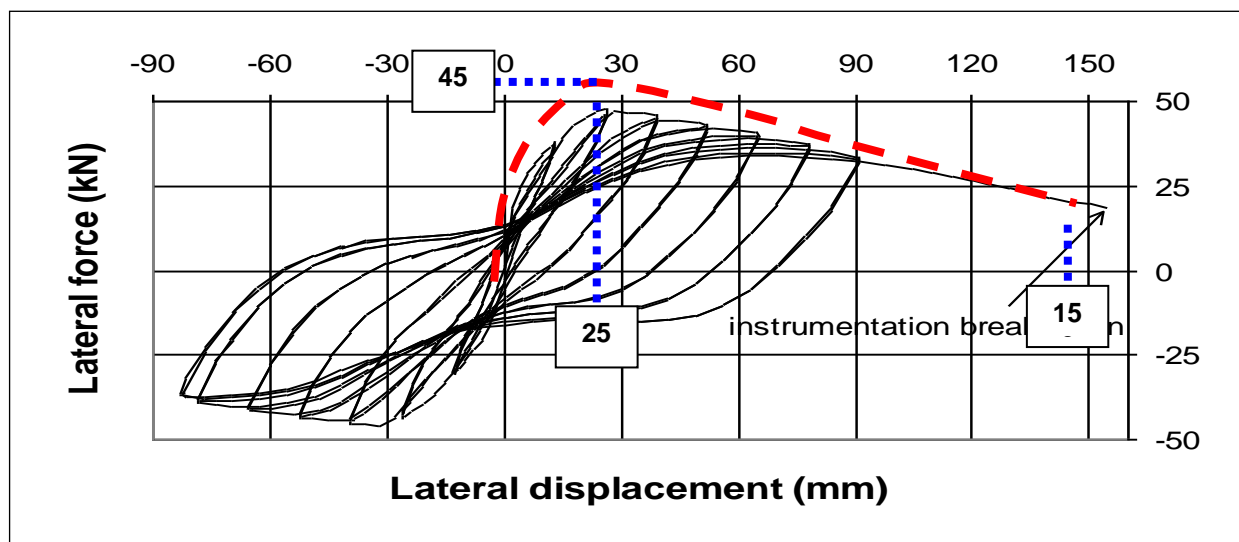
<i>Proprietà meccaniche cls</i>	<i>Proprietà meccaniche acciaio</i>	<i>Proprietà geometriche</i>
$f_{cm}=347 \text{ Kg/cm}^2$	$f_y=5000 \text{ Kg/cm}^2$	Larghezza =20 cm
$E_c= 333457 \text{ Kg/cm}^2$	$E_s=2100000 \text{ kg/cm}^2$	Altezza =20 cm
$\varepsilon_{cu}=0.0050$		

<i>Armatura Pilastro</i>	
<i>Armatura // lato superiore</i>	2 $\phi$ 16
<i>Armatura // lato inferiore</i>	2 $\phi$ 16
<i>Armatura trasversale</i>	1 $\phi$ 6 / 10 cm

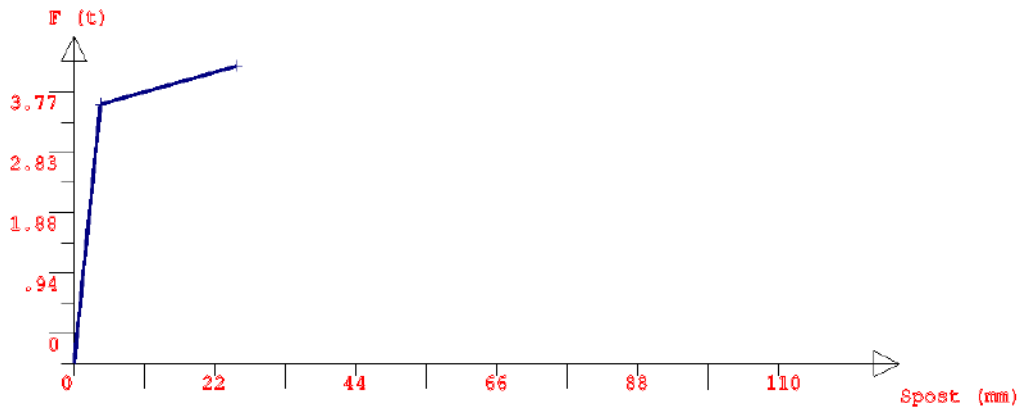
**Risultato sperimentale:**

La prova di carico condotta sul campione sopra indicato viene effettuata a pressoflessione retta applicando il carico assiale pari a 36 t e poi eseguendo la prova di pushover.

Di seguito viene riportato il risultato sperimentale della prova in esame:



**Curva sperimentale**

**Analisi dei risultati :***Curva di Capacità – Analisi con CDSWin*

	<i>Soluzione sperimentale</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (*)</i>
<i>Lateral Force (KN)</i>	45	46,50	1,033
<i>Lateral Displacement (mm)</i>	25	24.30	0,972

(\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

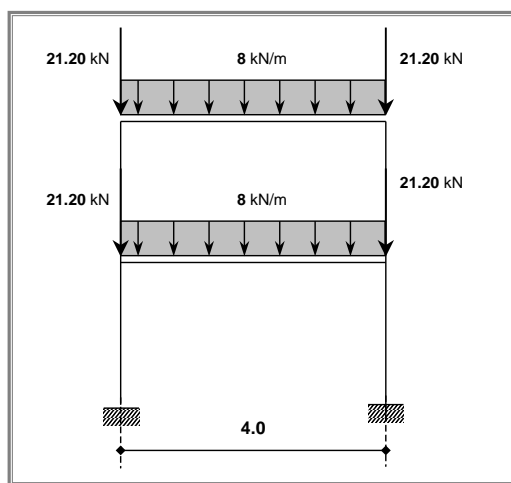
## Test di verifica n°25

### Telaio piano

**Fonte di riferimento:** Università di Roma “La Sapienza” – ECOLEADER PROJECT

**Tipo di analisi:** Analisi Statica non Lineare.

**Schema di calcolo:** Sia dato il telaio piano in fig., staticamente indeterminato. A ciascuna delle travi viene applicato un carico uniformemente distribuito di intensità pari a 8 kN/m e, in corrispondenza dei nodi, viene aggiunto un carico nodale verticale pari 21.20 kN.



**Modello di calcolo:** Per modellare correttamente la struttura è necessario schematizzarla come insieme di 6 elementi monodimensionali interconnessi attraverso 6 nodi. Per quanto riguarda, la condizione di vincolo dei nodi alla base si è proceduto all’inserimento di vincoli tipo incastro.

**Obiettivo:** Il modello, così implementato, viene sottoposto ad un’analisi di tipo pushover. Tale analisi si propone di valutare la risposta anelastica del sistema prima descritto soggetta ad una distribuzione di forze monotonicamente crescenti, confrontando la soluzione fornita dalla fonte di riferimento con quella fornita dall’analisi di CDSwin.

### *Caratteristiche meccanico-geometriche:*

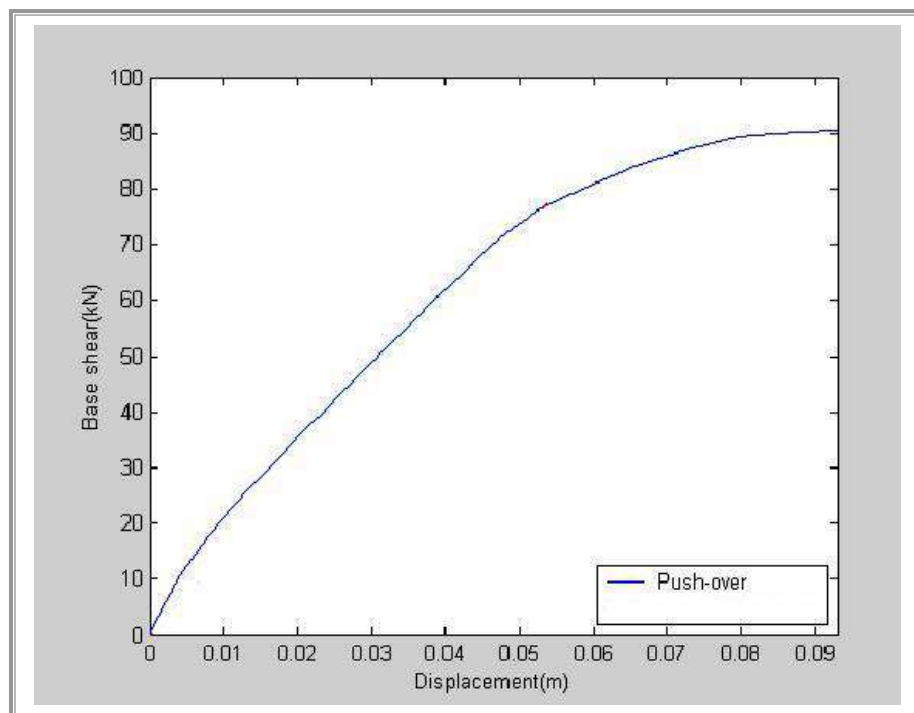
<i>Proprietà meccaniche cls</i>	<i>Proprietà meccaniche acciaio</i>	<i>Proprietà geometriche</i>
$f_{cm}=200 \text{ Kg/cm}^2$	$f_{yd}=5500$	Travi =26x40 cm
$E_c= 150000 \text{ Kg/cm}^2$	$E_s= 1974240 \text{ kg/cm}^2$	Pilastri =26x26 cm
$\varepsilon_{cu}=0.004$		



<i>Armatura Pilastri</i>		
	<i>I ordine</i>	<i>II ordine</i>
<i>Armatura // lato superiore</i>	3 $\phi$ 14	3 $\phi$ 12
<i>Armatura // lato inferiore</i>	3 $\phi$ 14	3 $\phi$ 12
<i>Armatura trasversale</i>	1 $\phi$ 6 / 20 cm	1 $\phi$ 6 / 20 cm

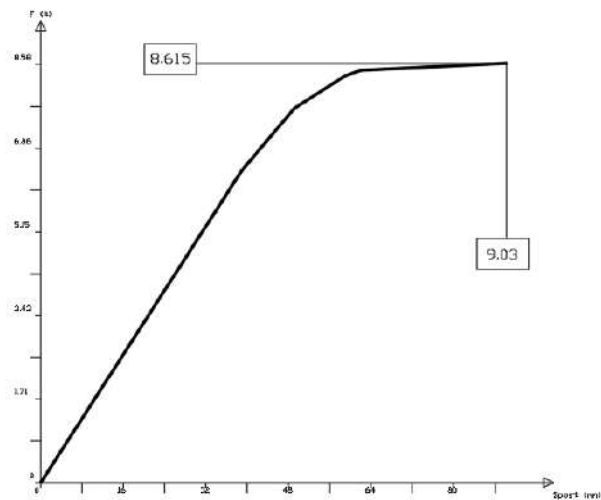
<i>Armatura Travi</i>	
<i>Armatura // lato superiore</i>	7 $\phi$ 14
<i>Armatura // lato inferiore</i>	4 $\phi$ 14
<i>Armatura trasversale</i>	1 $\phi$ 8 / 30 cm

**Soluzione:**



*Curva di capacità FEAT*

**Analisi dei risultati:** L’analisi effettuata conduce ai seguenti principali risultati:



Curva capacità CDSWin

<i>Maximum base shear</i> (kN)	90
<i>Displacement</i> ( m )	0.09

	<i>Soluzione sperimentale</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio</i> (*)
<i>Maximum base shear (kN)</i>	90	86,15	0,957
<i>Displacement (m)</i>	0.09	0,0903	1,003
<i>Tipo di meccanismo</i>	<i>Di piano</i>	<i>Di piano</i>	//

(\*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell’elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

## Test di verifica n°26

### Edificio regolare

**Fonte di riferimento:** Università di Roma “La Sapienza” – ECOLEADER PROJECT

**Tipo di analisi:** Analisi Statica non Lineare.

**Schema di calcolo:** Dato un edificio multipiano regolare se ne vuole analizzare il comportamento in campo non lineare. Lo schema, riportato in fig. 1, rappresenta la pianta di una struttura intelaiata di 4 piani per la quale, a tutte le quote, travi e pilastri hanno dimensioni uguali e, precisamente:

	Sezione (cm x cm)
<b>Pilastri</b>	30 x 60
<b>Travi</b>	30 x 60

L'interpiano è costante per tutta l'altezza dell'edificio e pari a 3.20m.

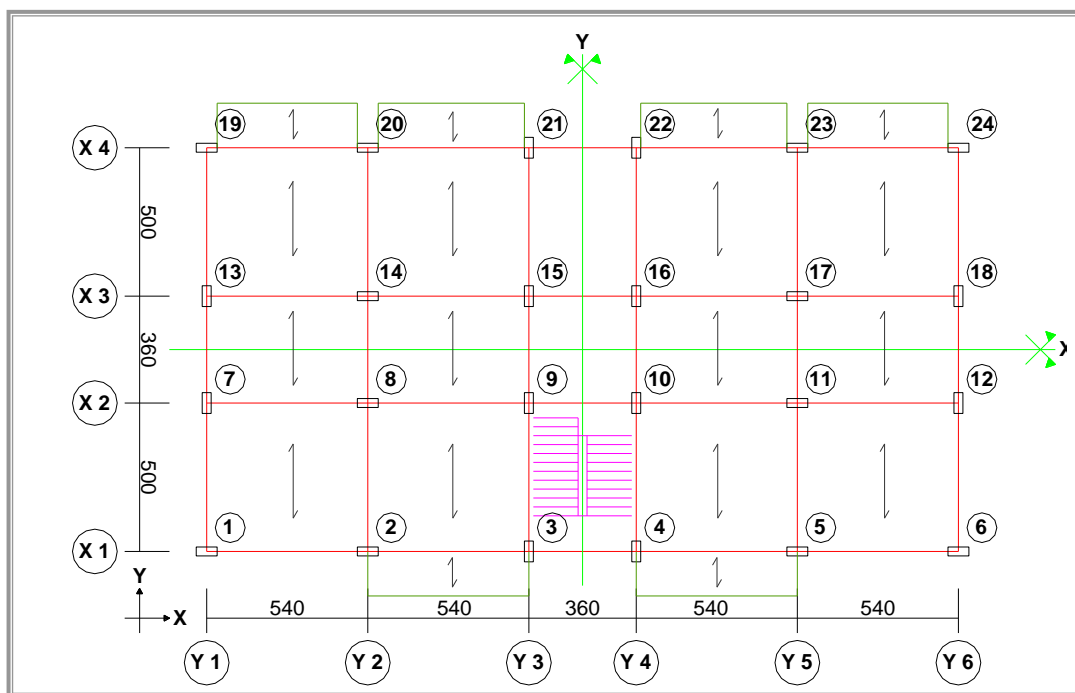


Fig. 1

**Modello di calcolo:** Il modello di calcolo si ottiene facilmente seguendo lo schema strutturale riportato in fig. 1.

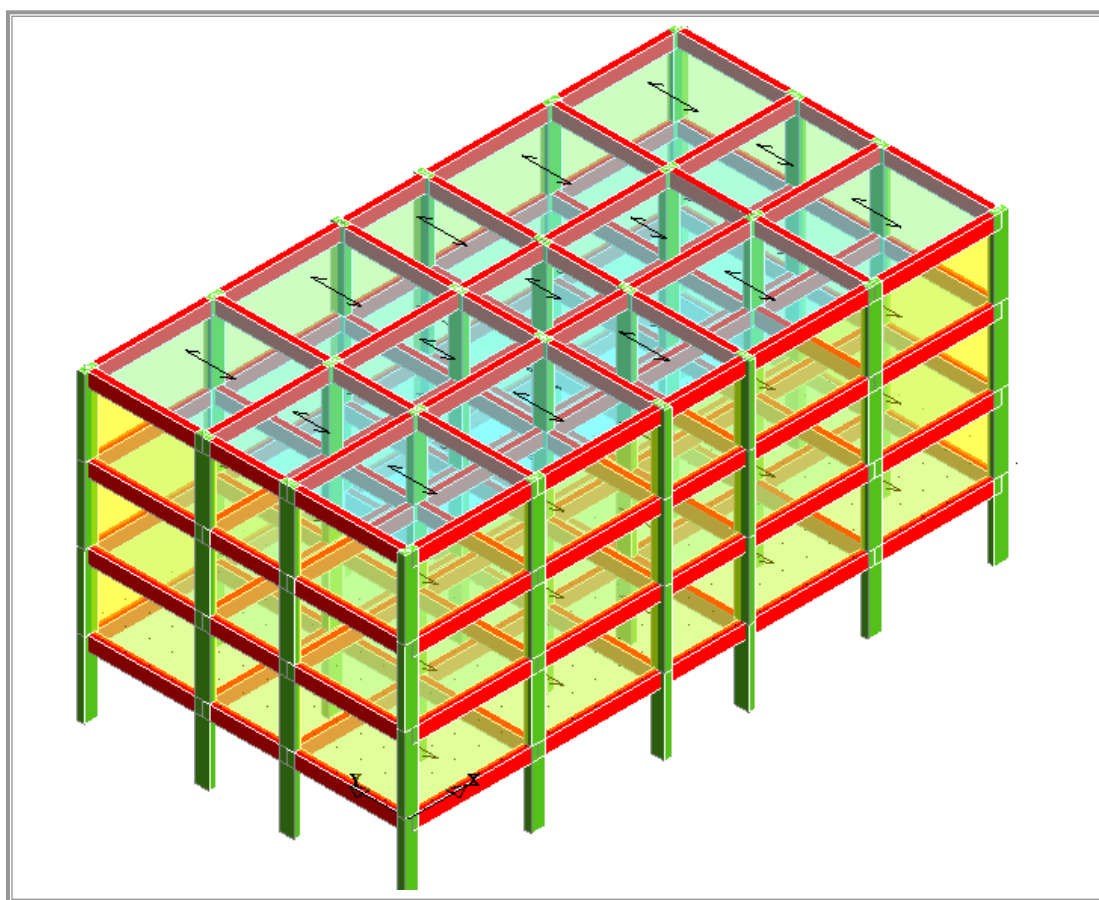
Le modalità di input prevedono, dunque, l'inserimento di aste travi e pilastri in modo da ottenere spazialmente la schematizzazione richiesta, che si riporta in fig. 2.

Per l'inserimento dei carichi verticali agenti si è fatto riferimento ai valori riportati nelle seguenti tabelle:

<i>Condizione di carico</i>	<i>kN/m<sup>2</sup></i>
<i>P. Permanente</i>	5.88
<i>P. Tamponature</i>	2.45
<i>Q Variabile</i>	1.96
<i>P. Calcestruzzo</i>	2.45

<i>coeff. riduttivo carichi variabili</i> <i>0.3 per abitazioni e uffici</i>	<i>coeff. riduttivo contemporaneità carichi variabili</i> <i>0.8 per piani intermedi</i> <i>1 per copertura</i>
---	---

Le orditure dei solai sono quelle indicate in fig. 1.



**Obiettivo:** L'analisi si propone di valutare la risposta anelastica di un edificio multipiano regolare soggetto ad un'analisi di tipo push-over.

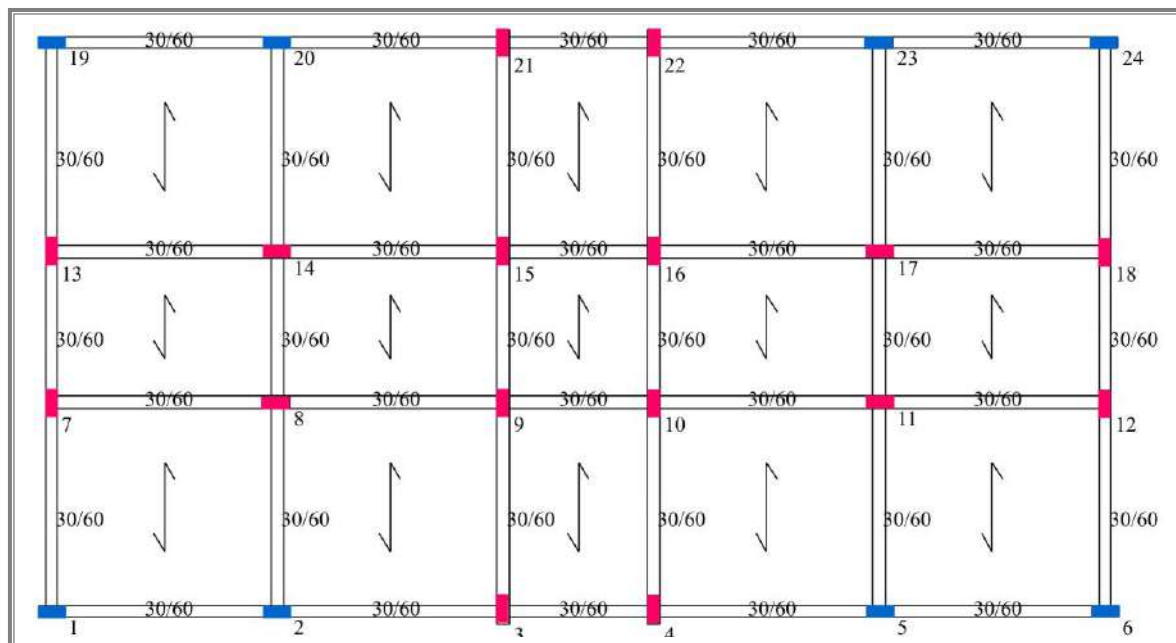
**Caratteristiche meccanico-geometriche:**

Proprietà meccaniche cls			Proprietà meccaniche acciaio
$f_{cm}=335 \text{ Kg/cm}^2$			$f_{yk}=5500$
$E_c=158090 \text{ Kg/cm}^2$			$E_s=2100000 \text{ kg/cm}^2$
$\varepsilon_{cu}=0.0035$ travi fon.	$\varepsilon_{cu}=0.0060$ travi elev.	$\varepsilon_{cu}=0.0065$ pilastri	

**Sezioni:** Con riferimento alla fig. 1 le armature longitudinali di pilastri e travi sono riportate nelle seguenti tabelle:

Pilastri		
tutte sezioni 30cm x 60cm		
nome	armatura // lato corto	armatura // lato lungo
sez.1	6+6 $\phi 16$	8+8 $\phi 16$
sez.2	8+8 $\phi 16$	9+9 $\phi 16$

Allineamento	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
X4	sez.1	sez.1	sez.2	sez.2	sez.1	sez.1
X3	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2
X2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2
X1	sez.1	sez.1	sez.2	sez.2	sez.1	sez.1



<b>Travi</b>			
<i>tutte alte con sezioni 30 cm x 60 cm</i>			
<b>nome</b>	<b>armatura sup.</b>	<b>armatura inf.</b>	<b>armatura di parete</b>
sez.3	8 $\phi$ 16	6 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16
sez.4	8 $\phi$ 16	5 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16
sez.5	5 $\phi$ 16	3 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16
sez.6	7 $\phi$ 16	3 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16
sez.7	6 $\phi$ 16	5 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16
sez.8	9 $\phi$ 16	9 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16
sez.9	4 $\phi$ 16	4 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16
sez.10	4 $\phi$ 16	3 $\phi$ 16	3+3 $\phi$ 16

<b>Allineamenti // asse X</b>										
<b>allineamento</b>	<b>Y1</b>	<b>Y2</b>	<b>Y2</b>	<b>Y3</b>	<b>Y3</b>	<b>Y4</b>	<b>Y4</b>	<b>Y5</b>	<b>Y5</b>	<b>Y6</b>
<b>X4</b>	sez.3	sez.4	sez.4	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.4	sez.4	sez.3
<b>X3</b>	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5
<b>X2</b>	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5
<b>X1</b>	sez.3	sez.4	sez.4	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.4	sez.4	sez.3

<b>Allineamenti // asse Y</b>						
<b>allineamento</b>	<b>Y1</b>	<b>Y2</b>	<b>Y3</b>	<b>Y4</b>	<b>Y5</b>	<b>Y6</b>
<b>X4</b>	sez.7	sez.9	sez.7	sez.7	sez.9	sez.7
<b>X3</b>	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
<b>X3</b>	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
<b>X2</b>	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
<b>X2</b>	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
<b>X1</b>	sez.7	sez.9	sez.7	sez.7	sez.9	sez.7

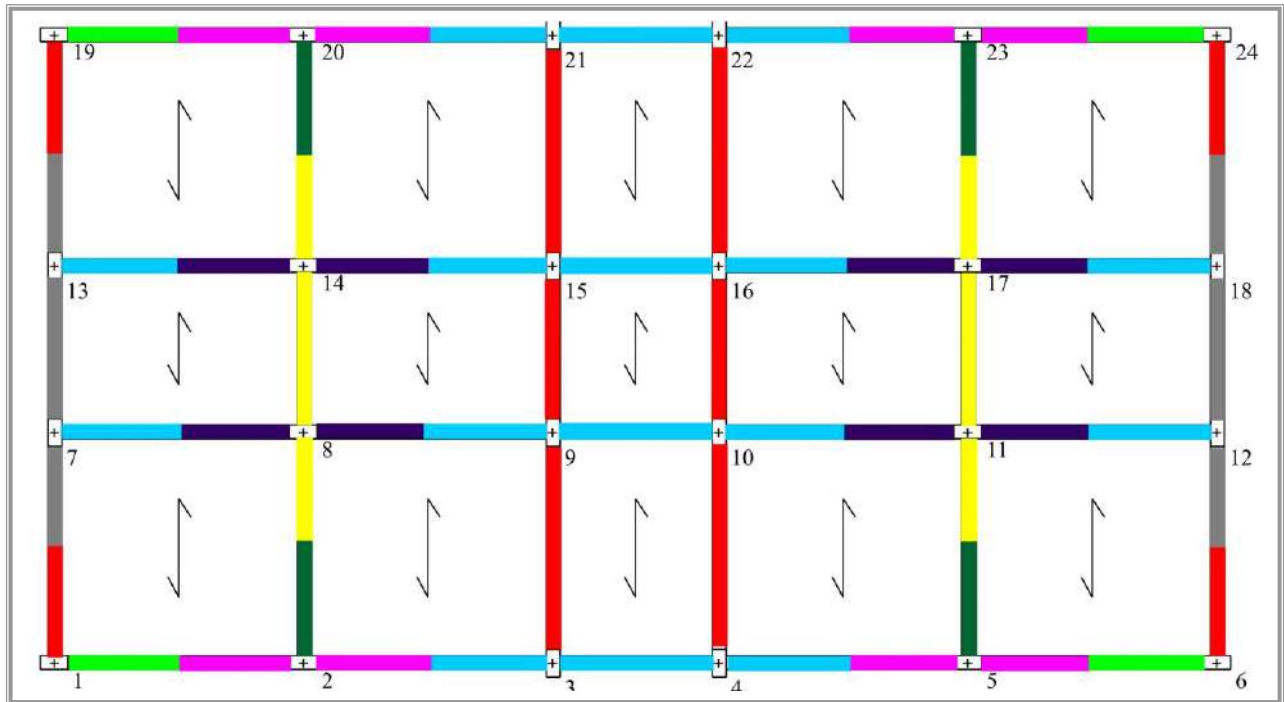


Fig. 4

Le armature trasversali sono:

- tutte le travi: staffe  $\phi 8$  passo 10 cm
- tutti i pilastri: staffe  $\phi 8$  passo 20 cm.

**Soluzione:** L'analisi effettuata conduce ai seguenti principali risultati:

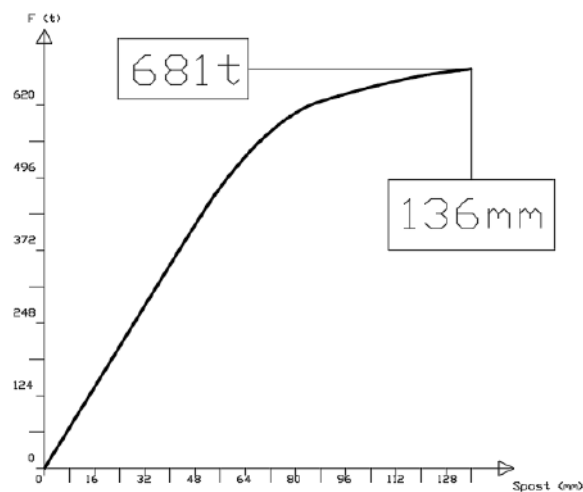


Fig. 5 – Curva Capacità CDSWIN

CDSWIN	
Maximum base shear (KN)	6810
Displcement ( cm )	13,6

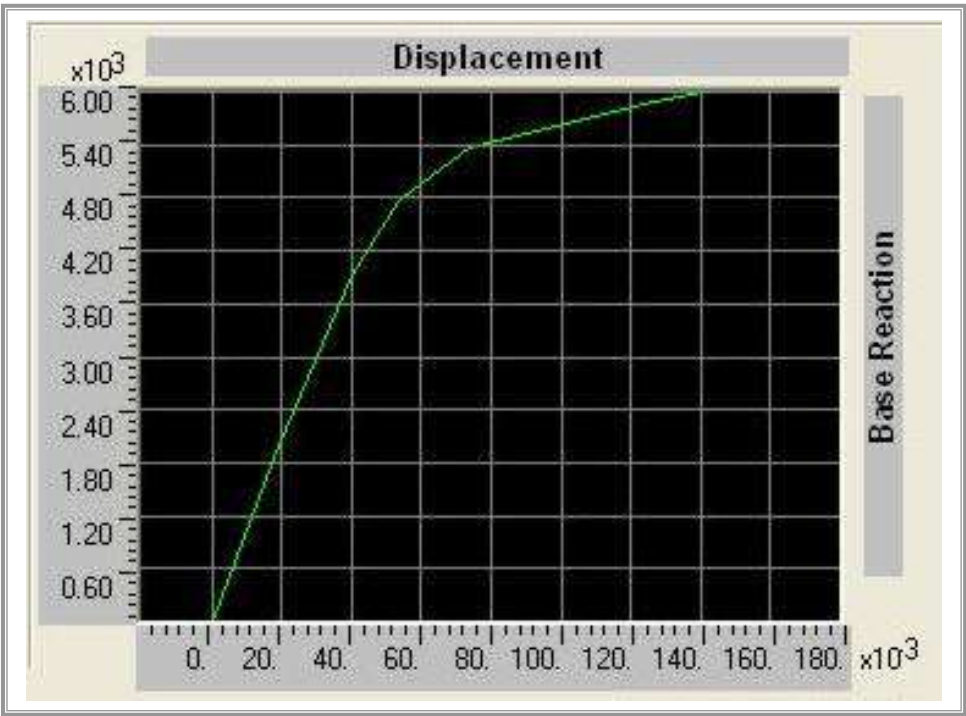


Fig. 6– Curva Capacità SAP NL

SAP NL	
Maximum base shear (KN)	6100
Displcement ( cm )	14



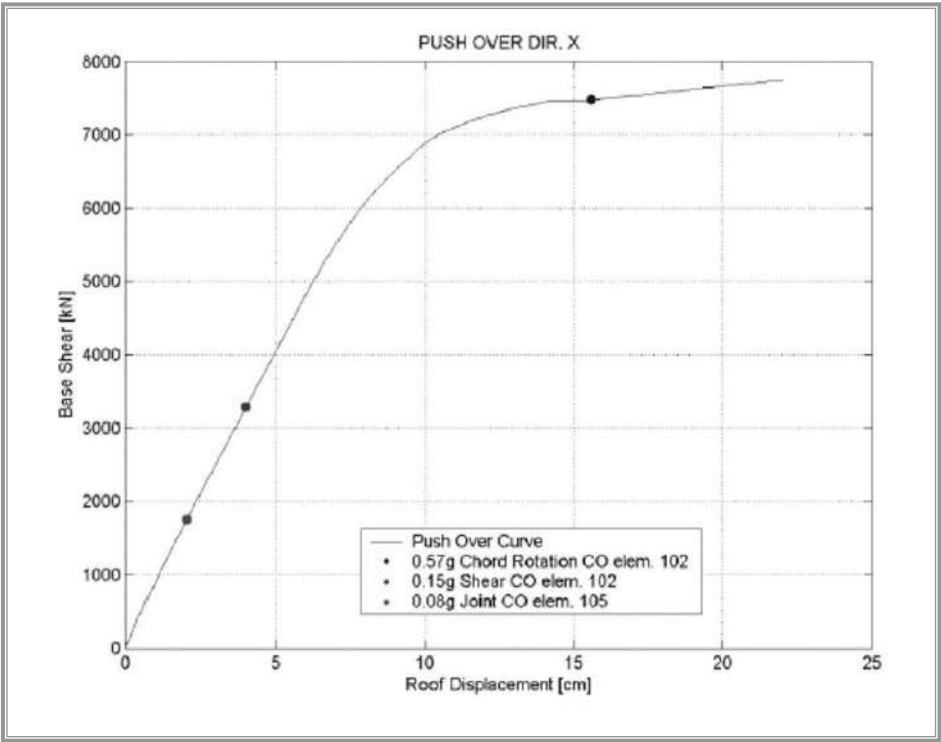


Fig. 7 – Curva Capacità OPENSEES

OPENSEES	
Maximum base shear (kN)	7500
Displacement (cm)	16

Analisi dei risultati:

Soluzione	SAP NL	OPENSEES	Var. % (*)
Maximum base shear (kN)	6100	7500	22,9
Displacement (mm)	140	160	14,3

<i>Soluzione</i>	<i>SAP NL</i>	<i>CDSWIN</i>	<i>Var. % (*)</i>
<i>Maximum base shear (KN)</i>	<i>6100</i>	<i>6810</i>	<i>11,6</i>
<i>Displacement (mm)</i>	<i>140</i>	<i>136</i>	<i>2,9</i>

(\*): per Var.% si intende la variazione percentuale:  $((x_1-x_2)/x_1) \cdot 100$  [%].

## Test di verifica n°27

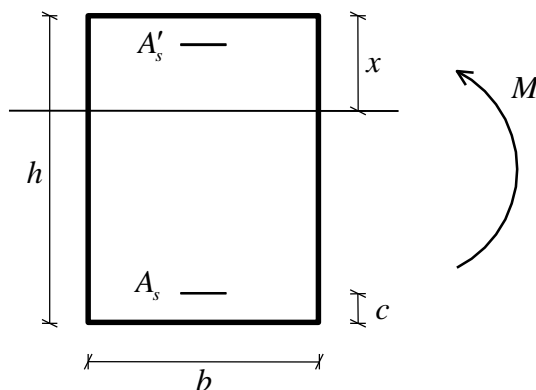
### a) Verifica allo Stato Limite di Esercizio di fessurazione

**Tipo di analisi:** Verifica a fessurazione per flessione.

**Schema di calcolo:** Data una sezione resistente in c.a., di geometria ed armature note, soggetta a momento flettente  $M$  si vuole determinare l'ampiezza massima delle fessure (S.L.E. di fessurazione).

§ § §

Sia data la seguente sezione in c.a.:



$$b = 30 [cm] \quad ; \quad h = 40 [cm] \quad ; \quad c = 3.5 [cm]$$

$$A_s = 6\phi_{14} = 9.236 [cm^2] \quad ; \quad A_s' = 3\phi_{14} = 4.618 [cm^2]$$

$$E_s = 2100000 [kg \, cm^{-2}] \quad ; \quad E_{cm} = 299619 [kg \, cm^{-2}] \quad ; \quad f_{ct,m} = 22.1 [kg \, cm^{-2}] \quad ; \quad n = \frac{E_s}{E_c} = 15$$

Si immagini tale sezione soggetta, per le combinazioni di carico frequente e quasi permanente, ai seguenti momenti flettenti:

$$M = \begin{cases} 5625 [kg \, m] & \text{comb. frequente} \\ 5312 [kg \, m] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

Per queste sollecitazioni si ricavano le seguenti posizioni dell'asse neutro:

$$x = \begin{cases} 11.97 [cm] & \text{comb. frequente} \\ 11.95 [cm] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

Il calcolo dell'ampiezza delle fessure sarà condotto in accordo a quanto descritto nell'Eurocodice 2 al punto 7.3.4. Secondo quanto riportato nell'EC2, l'ampiezza massima attesa delle fessure è data da:

$$w_k = s_{r,max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

dove:

$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$  = differenza fra le deformazioni medie di acciaio e calcestruzzo

$s_{r,max}$  = distanza massima fra le fessure

La determinazione delle deformazioni medie di acciaio e calcestruzzo si effettua in base alla seguente formulazione:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_B \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

dove:

$$\sigma_s = \begin{cases} 1869 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. frequente} \\ 1764 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$k_t = \begin{cases} 0.6 & \text{comb. rara e frequente} \\ 0.4 & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$f_{ct,eff} = f_{ct,m} = \begin{cases} 22.1 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. frequente} \\ 22.1 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$A_{c,eff} = b \cdot \min \left\{ 2.5c, \frac{h-x}{3}, \frac{h}{2} \right\} = \begin{cases} b \cdot \min \{8.75, 9.34, 20\} & \text{comb. frequente} \\ b \cdot \min \{8.75, 9.35, 20\} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 262.5 [cm^2] & \text{comb. frequente} \\ 262.5 [cm^2] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \begin{cases} 0.035 & \text{comb. frequente} \\ 0.035 & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$\alpha_B = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{2100000}{299619} = 7.009$$

Sostituendo si ottiene:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \begin{cases} 6.66 \cdot 10^{-4} & \text{comb. frequente} \\ 6.91 \cdot 10^{-4} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

entrambi non minori di:

$$0.6 \frac{\sigma_s}{E_s} = \begin{cases} 5.34 \cdot 10^{-4} & \text{comb. frequente} \\ 5.04 \cdot 10^{-4} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

La distanza massima fra le fessure, invece, è data da:

$$s_{r,\max} = k_3 \left( c - \frac{\phi}{2} \right) + k_1 k_2 k_4 \frac{\phi}{\rho_{p,\text{eff}}}$$

con:

$$k_1 = 0.8 \quad ; \quad k_2 = 0.5 \quad ; \quad k_3 = 3.4 \quad ; \quad k_4 = 0.425$$

$\phi$  = diametro dell'armatura = 1,4 [cm]

Sostituendo si ottiene:

$$s_{r,\max} = 16.284 \text{ [cm]}$$

Ne consegue, alla fine, che l'ampiezza delle fessure è pari a:

$$w_k = s_{r,\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \begin{cases} 0.108 \text{ [mm]} & \text{comb. frequente} \\ 0.113 \text{ [mm]} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

**CDSWin** fornisce il seguente tabulato:

STAMPA VERIFICHE S.L.E. - E.C. - ELEVAZIONE																							
FESSURAZIONE											FRECCHE		TENSIONI										
Fila	Quota	Tra	Combi	Fessu.	dist	Con	Com	Mf X	Mf Y	N	Frecc	mm	Com	Combinaz	σ lim.	σ cal.	Co	Comb	Mf X	Mf Y	N		
In fi	In fi	cto	Carico	lim	cal	mm	cio	bin	(τ°m)	(τ°m)	(τ)	limite	calc	bin	Carico	Kg/cmq	Kg/cmq	nc	(τ°m)	(τ°m)	(τ)		
1	2,00		Rara												Rara	cls	120,0	87,2	3	1	6,4	0,0	0,0
2	2,00		Freq	0,4	0,108	163	3	1	5,6	0,0	0,0				Rara	fer	3600	2131	3	1	6,4	0,0	0,0
			Perm	0,3	0,113	163	3	1	5,3	0,0	0,0				Perm	cls	90,0	73,5	3	1	5,3	0,0	0,0

Dal confronto si evidenzia la corrispondenza dei risultati:

	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
Comb. frequente	0,108 [mm]	0,108 [mm]	1.000
Comb. quasi permanente	0,113 [mm]	0,113 [mm]	1.000

#### Nota

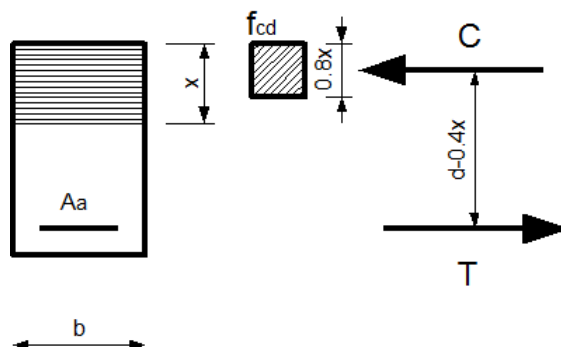
In relazione al tabulato fornita da **CDSWin**, si osservi che per la combinazione di carico RARA la corrispondente riga delle fessure risulta vuota. Questo significa che per tale combinazione di carico la verifica non è stata effettuata per scelta dell'operatore.

Nel caso, invece, che i valori fossero tutti nulli (pari a zero) allora l'ampiezza delle fessure è stata calcolata ma è nulla. In questa evenienza, comunque, non sarà nullo il valore del momento flettente.

(\*): per Ratio si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

b) Determinazione del momento e del taglio resistenti per una sezione in c.a.b1) CALCOLO DEL MOMENTO RESISTENTE

Si consideri la seguente sezione in c.a.:



dove:

$$b = 30 \text{ [cm]}$$

$$h = 40 \text{ [cm]}$$

$$d = 40 - 3,5 = 36,5 \text{ [cm]}$$

$$Aa = 6 \text{ } \varnothing 14 = 9,23 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Staffe: } \varnothing 8/21 \text{ [cm]}$$

Calcestruzzo C20/25

Barre B450 C

$$f_{cd} = 200/1,5 \cdot 0,85 = 113 \text{ [kg/cm}^2\text{]} \text{ (resistenza di progetto del calcestruzzo)}$$

$$f_{yd} = 4500/1,15 = 3913 \text{ [kg/cm}^2\text{]} \text{ (resistenza di progetto dell'acciaio)}$$

Si riportano i valori ottenuti con il programma **CDSWin** con il metodo rigoroso utilizzando il legame parabola rettangolo per il calcestruzzo ed elastoplastico perfetto per l'acciaio.

Questi valori ultimi sono ottenuti mediante un modello che prevede l'integrazione numerica dello stato tensionale.

STAMPA PROGETTO S.L.U. - ELEVAZIONE																																
VERIFICA A PRESO-FLESSIONE																VERIFICA A TAGLIO E TORSIONE																
File	Quota	T	C	z	Sez	Co	M	Ed	N	Ed	Moltip	x	z	z	Area	cmq	Co	V	Ed	V	Ed	T	Sdu	V	Ryd	TRd	TRld	Coe	Coe	ALon	Staffe	
Fin.	Final	a	Bas	n	Co	M	Ed	N	Ed	Moltip	x	z	z	z	Area	cmq	Co	V	Ed	V	Ed	T	Sdu	V	Ryd	TRd	TRld	Coe	Coe	ALon	Staffe	
Ctg	AmpC	t	Alt	C	mb	(t*m)	(t)	Ultimo	/d	100	100	sup	inf	mb	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)
1	2,00		2	1	1	2,8	0,0	4,3	22	100	28	4,6	9,2	1	0,0	7,5	0,0	11,1	15,3	3,5	0,0	39	49	0,0	21	42	8					
2	2,00		30	3	1	9,4	0,0	1,3	22	100	28	4,6	9,2	1	0,0	6,3	0,0	11,1	15,3	3,5	0,0	33	41	0,0	21	416	8					
2,5	1,00		40	8	1	2,8	0,0	4,3	22	100	28	4,6	9,2	1	0,0	-7,5	0,0	11,1	15,3	3,5	0,0	39	49	0,0	21	42	8					

Si effettuerà il controllo dei risultati per la flessione nella sezione di campata e per il taglio all'incastro.

In campata il programma fornisce per un momento di calcolo

$$M_{Ed} = 9,4 \text{ [t m]}$$

e un moltiplicatore ultimo di 1.3.

Il valore del momento resistente ultimo vale allora:

$$M_{ru} = M_{Ed} \times 1.3 = 9,4 \times 1.3 = 12,22 \text{ [t m]}$$

Si operi, ora, il confronto con il calcolo semplificato con stress block pari all'80% dell'asse neutro:

$$x = (A_a \times f_{yd}) / (0.8 \times b \times f_{cd}) = 9,23 \times 3913 / (0,8 \times 30 \times 113) = 13.32 \text{ [cm] (asse neutro)}$$

$$M_{ru}^* = (A_a \times f_{yd}) \times (d - 0,4 x) = 9,23 \times 3913 \times (37 - 0,4 \times 13.32) / 100000 = 11,44 \text{ [t m] (momento resistente)}$$

$$\text{Scarto } \varepsilon = (11,44 - 12,22) / 12,22 = - 6 \%$$

Come previsto, il metodo semplificato risulta leggermente a favore di sicurezza, validando il risultato ottenuto in maniera rigorosa dal software.

## b2) CALCOLO DEL TAGLIO RESISTENTE

Dati di calcolo:

$$C_{tg\theta} = 2,5$$

$$\text{staffe } \varnothing 8/21 \text{ [cm] ovvero } A_{sw} = 1 \text{ [cmq]} \quad s = 21 \text{ [cm]}$$

$$d = 36,5 \text{ [cm]}$$

All'appoggio il programma fornisce un taglio resistente pari a:

$$V_{Rdy} = 15,3 \text{ [t]}$$

Si effettua il calcolo manuale così come previsto al punto 4.1.2.3.5.2 delle NTC 2018. Il taglio trazione risulta:

$$V_{Rsd} = 15,3 \text{ [t]}$$

Il taglio compressione risulta:

$$V_{Rcd} = 18,6 \text{ [t]}$$

Nella tabella di output del **CDSWin** è riportato il taglio resistente, cioè il valore minimo tra taglio compressione e taglio trazione:

$$V_{Rd} = 15,3 \text{ [t]}$$

In tabella sono riportati anche i coefficienti di impegno del calcestruzzo e dell'acciaio. Per il calcestruzzo si ha:

$$V_{Ryd} / V_{Rcd} = 0,41$$

Mentre per l'acciaio si ha:

$$V_{Ryd} / V_{Rsd} = 0,49$$

## Test di verifica n°28

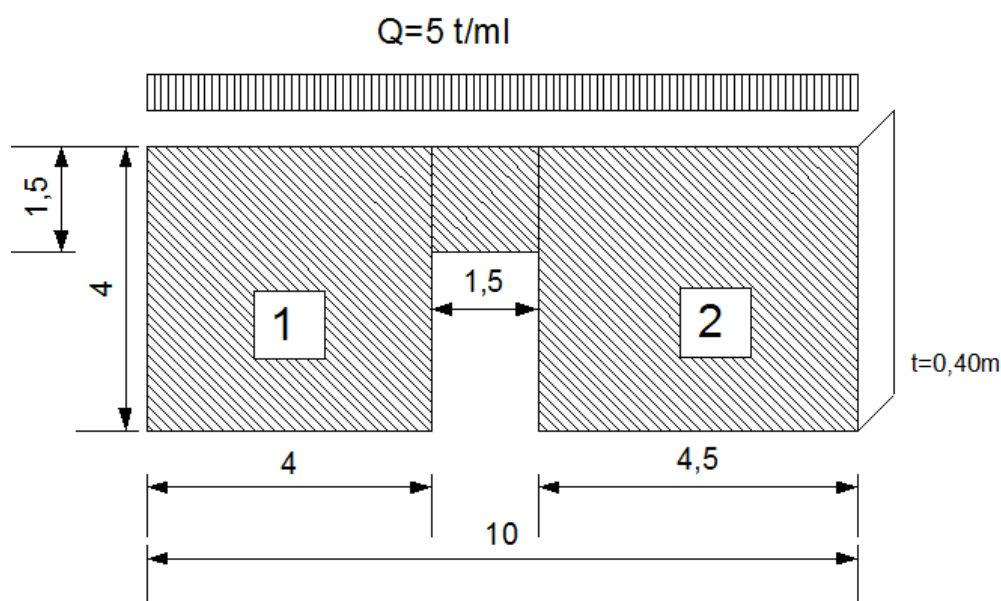
### Analisi sismica lineare e non lineare (push over) di una facciata in muratura

**Tipo di analisi:** Lineare e non lineare (Push Over) di una facciata in muratura ad una sola elevazione dello spessore di 0,40 ml con un carico verticale derivante dall'impalcato di 5 t/ml.

**Obiettivo:** Il test consiste nel confrontare i risultati ottenuti da una analisi sismica lineare ed una non lineare effettuata con il CDSWin – CDMa Win con i risultati ottenuti direttamente con calcoli manuali.

§ § §

Sia data la seguente facciata in muratura:



### CARATTERISTICHE DELLE MURATURE

$f_k = 20 \text{ kg/cm}^2$  (resistenza a compressione)

$\tau_k = 0,91 \text{ kg/cm}^2$

$E = 20000 \text{ kg/cm}^2$

$G = 8000 \text{ kg/cm}^2$

$\gamma = 1,9 \text{ t/mc}$

$\delta_{bSLU} = 0,006$  (deformazione ultima collasso flessionale)

$\delta_{sSLU} = 0,004$  (deformazione ultima collasso a taglio)

Livello di conoscenza adeguata FC = 1,20

$\gamma_M = 2$  coefficiente parziale muratura combinazione sismica



RESISTENZE DI PROGETTO**Analisi lineare:**

$$f_d = 20 / (2 \times 1,2) = 8,33 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_d = 0,91 / (2 \times 1,2) = 0,38 \text{ kg/cm}^2$$

**Analisi non lineare:**

$$f = 20 / 1,2 = 16,67 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = 0,91 / 1,2 = 0,76 \text{ kg/cm}^2$$

VALUTAZIONE DELLE MASSE COMPLESSIVE

Il programma, in automatico, fornisce le seguenti grandezze:

BARICENTRI MASSE E RIGIDENZE								
PIANO N.ro	QUOTA (m)	PESO (t)	XG (m)	YG (m)	XR (m)	YR (m)	DX (m)	DY (m)
1	4,00	<b>64,63</b>	5,00	0,00	5,04	0,00	0,04	0,00

Valutazione manuale

Nel valutare le masse complessive che partecipano al tagliante sismico, le pareti si considerano al 50% per cui:

$$W_g = 0,40 \times 1,90 \times (4 \times 4/2 + 4,5 \times 4/2 + 1,5 \times 1,5) = 14,63 \text{ t}$$

Mentre la massa portata dovuta al solaio è data da:

$$W_q = 5 \times 10 = 50 \text{ t}$$

Di conseguenza:

$$W_t = W_g + W_q = 64,63 \text{ t}$$

valore identico a quello ottenuto dal software.

ANALISI ELASTICA LINEARE SISMICA MODALE

Il programma fornisce i seguenti risultati:

VERIFICA SISMICA GLOBALE MASCHI MURARI - QUOTA N.ro: 1										
VERIFICA GLOBALE MASCHI MURARI										
Muro N.ro	Modo di collasso	Cmb	Coeff. sicur.	Nru (t)	Vru (t)	Mru (tm)	Nd (t)	Vd (t)	Md (tm)	TirPass (t)
1	FLESSIONE	15	1,80	-36,76	17,48	49,26	-36,76	6,85	27,41	0,00
2	FLESSIONE	11	1,77	-40,78	19,52	61,95	-40,78	8,76	35,04	0,00

Valutazione manuale

Per i meccanismi flessionali si considera la compressione media al piede del pannello mentre per le verifiche del meccanismo a taglio per fessurazione diagonale si considera la compressione media nella zona centrale del pannello.

**Muro 1:**

$$N_{p.p.} = 1,90 \times 4 \times 4 \times 0,4 = 12,16 \text{ t}$$

$$N_{p.p. \text{ architrave}} = \frac{1}{2} \times 1,90 \times 1,5 \times 1,5 \times 0,4 = 0,85 \text{ t}$$

$$N_q \text{ solaio} = (4 + 1,50/2) \times 5 = 23,75 \text{ t}$$

$$N_{\text{somma}} = 36,760 \text{ t}$$

$$\sigma_0 = 36760 / (40 \times 400) = 2,29 \text{ kg/cm}^2 \text{ (piede pannello)}$$

$$M_{ru} = 400^2 \times 40 \times 2,29/2 \times (1 - 2,29/(0,85 \times 8,33)) = 4957953 \text{ kgcm} = 49,58 \text{ tm}$$

$$l/h = 1$$

$$\sigma_0 = 1,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{ru} = 400 \times 40 \times 1,5 \times 0,38/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,38))^{1/2} = 17794 \text{ kg} = 17,79 \text{ t}$$

**Muro 2:**

$$N_{p.p.} = 1,90 \times 4,50 \times 4 \times 0,4 = 13,68 \text{ t}$$

$$N_{p.p. \text{ architrave}} = \frac{1}{2} \times 1,90 \times 1,5 \times 1,5 \times 0,4 = 0,85 \text{ t}$$

$$N_q \text{ solaio} = (4,50 + 1,50/2) \times 5 = 26,25 \text{ t}$$

$$N_{\text{somma}} = 40,780 \text{ t}$$

$$\sigma_0 = 40780/(40 \times 450) = 2,27 \text{ kg/cm}^2 \text{ (piede pannello)}$$

$$M_{ru} = 450^2 \times 40 \times 2,27/2 \times (1 - 2,27/(0,85 \times 8,33)) = 6246075 \text{ kgcm} = 62,46 \text{ tm}$$

$$h/l=0,825 \text{ si assume } b=1$$

$$\sigma_0=1,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{ru} = 450 \times 40 \times 1,5 \times 0,38/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,38))^{1/2} = 20019 \text{ kg} = 20,02 \text{ t}$$

CONFRONTO

MURO n.	Mru CDS	Mru TEST	scarto %	Vru CDS	Vru TEST	scarto %
1	49,26	49,58	-0,65	17,48	17,79	-1,77
2	61,95	62,46	-0,83	19,52	20,02	-2,56

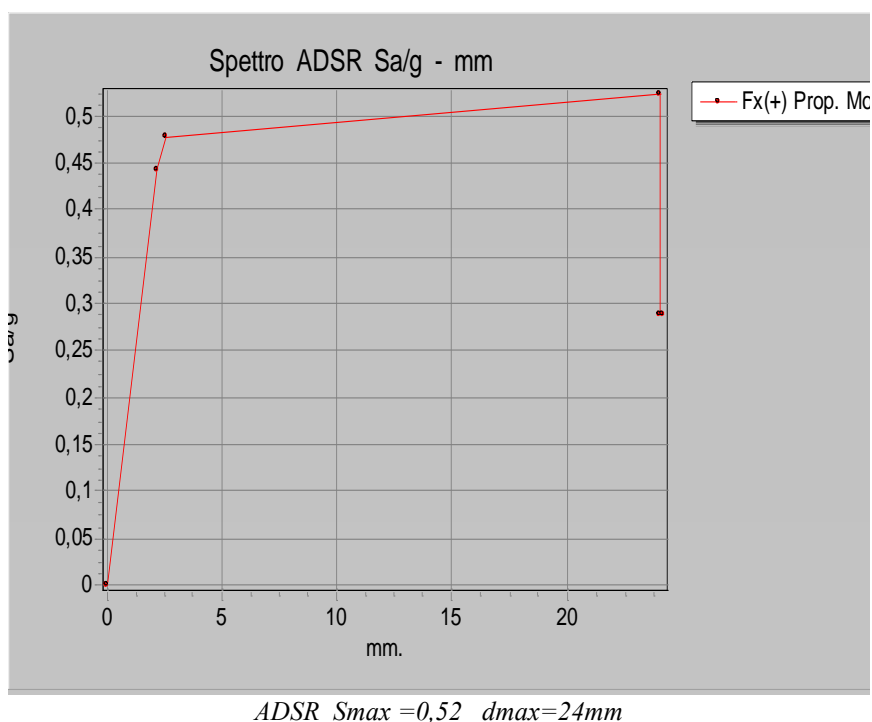
MURO n.	Nd CDS	Nd TEST	scarto %
1	36,76	36,76	0,00
2	40,78	40,78	0,00

Gli scarti sono inferiori al 1% per i momenti ed al 2,6% per i tagli e sempre A VANTAGGIO DI SICUREZZA.

ANALISI STATICA NON LINEARE (PUSH OVER)

Il programma, in automatico, fornisce le seguenti grandezze:

RISULTATI GENERALI PUSH-OVER			
PUSH-OVER N.ro	1 -	Distrib.Forze Fx(+) Prop.Modo	
Angolo Ingr. Sisma (Grd)	0	Numero collassi totali	2
Numero passo Resist.Max.	5	Numero passi significativi	7
Massa SDOF (t)	<b>64,63</b>	Taglio alla base max. (t)	<b>33,79</b>
Coeff. Partecipazione	1,00	Resistenza SDOF (t)	32,32
Rigidezza SDOF (t/m)	13020,63	Spostam. Snervam. SDOF mm	2
Periodo SDOF (sec)	0,14	Rapporto di incrudimento	0,000
Rapporto Alfau/alfa1	8814,116	Fattore struttura	3,708
Coeff Smorzam.Equival.(%)	33	Duttilità	9,681

Valutazione manuale

Si valutino i valori resistenti utilizzati per l'analisi non lineare.

**Muro 1:**

$$\sigma_0 = 2,29 \text{ kg/cm}^2 \text{ (piede setto)}$$

$$M_{ru} = 400^2 \times 40 \times 2,29/2 \times (1 - 2,29/(0,85 \times 16,67)) = 6143687 \text{ kgcm} = 61,44 \text{ t}$$

$$l/h=1$$

$$\sigma_0 = 1,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{ru} = 400 \times 40 \times 1,5 \times 0,76/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,76))^{1/2} = 28278 \text{ kg} = 28,28 \text{ t}$$

**Muro 2:**

$\sigma_0 = 2,27 \text{ kg/cm}^2$  (piede setto)

$$M_{ru} = 450^2 \times 40 \times 2,27/2 \times (1 - 2,27/(0,85 \times 16,67)) = 7720671 \text{ kgcm} = 77,21 \text{ tm}$$

$h/l = 0,825$  si assume  $b=1$

$\sigma_0 = 1,6 \text{ kg/cm}^2$

$$V_{ru} = 450 \times 40 \times 1,5 \times 0,76/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,76))^{1/2} = 31813 \text{ kg} = 31,81 \text{ t}$$

Per stimare in maniera affidabile il limite superiore del tagliante alla base ultimo, si ipotizzi che le pareti raggiungano i valori ultimi di resistenza contemporaneamente per cui:

**TAGLIANTE ULTIMO:**

- Per meccanismo flettente:  $V_{b1} = (M_{ru1} + M_{ru2})/H = (61,44 + 77,21)/4 = 34,66 \text{ t}$
- Per meccanismo tagliante:  $V_{b2} = V_{ru1} + V_{ru2} = (28,28 + 31,81) = 60,09 \text{ t}$

Il meccanismo ultimo della facciata è di tipo flessionale per cui:

$$V_b = V_{b1} = 34,66 \text{ t}$$

$$S_a = V_b/W = a_g/g = 34,66/64,63 = 0,536$$

$$d_{slu} = 0,006 \times 4000 = 24 \text{ mm (spostamento ultimo per meccanismo flessionale)}$$

**CONFRONTO**

GRANDEZZA	CDS	TEST	scarto %
Vb	33,79	34,66	-2,5
Sa	0,52	0,54	-3,7
d <sub>slu</sub>	24 mm	24 mm	0,0

I risultati dell'analisi risultano pienamente validati dal confronto effettuato.

## Test di verifica n°29

### Test pratico di validazione numerica per la progettazione dei rinforzi in FRP

#### Premessa

Il calcolo dei rinforzi in FRP viene effettuato con riferimento al documento CNR DT 200 /2004 ed alle Linee Guida del C.S.LL.PP. per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Collaudo di Interventi di Rinforzo di strutture di c.a., c.a.p. e muratura mediante FRP.

A causa delle modifiche apportate dalla Circolare Esplicativa 2019 rispetto alla precedente del 2009 riguardo la verifica di resistenza dei nodi trave-pilastro, si analizzano separatamente due casi:

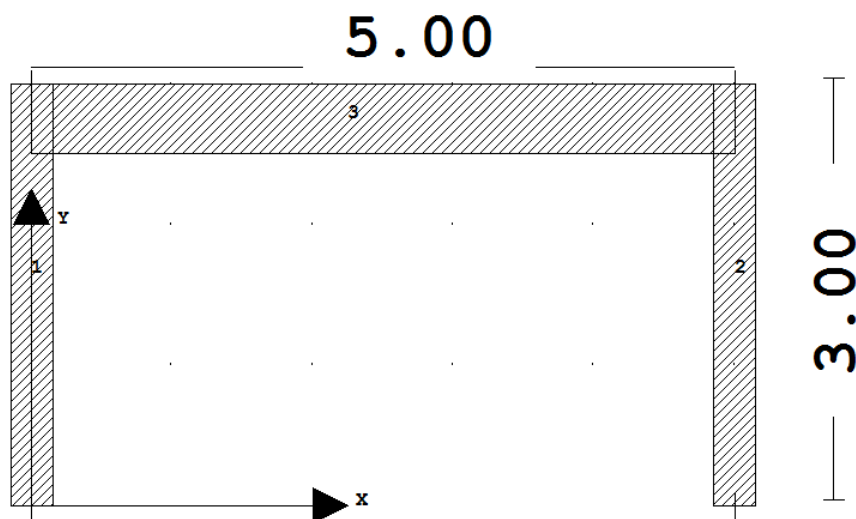
-calcolo con versioni precedenti alla release 2019 del *CDSWin* o con *CDSWin 2019* senza l'attivazione della voce *Parametri Circolare 2019*

-calcolo con *CDSWin 2019* e attivazione della voce *Parametri Circolare 2019*

#### Modello

I test vengono svolti su un semplice portale in calcestruzzo armato, valutando l'incremento di resistenza a taglio in corrispondenza di un estremo del pannello di nodo trave-pilastro.

Un ulteriore test è stato svolto per valutare l'incremento di duttilità derivante dal confinamento della zona critica di un pilastro.



Sezioni rettangolari:

Trave: B=30 cm H=50 cm

Pilastro: B=40 cm H=30 cm

Copriferro c=20mm

Calcestruzzo C20/25

Acciaio B450C

Spessore solaio=20cm

**FIBRE DI CARBONIO FRP TRAVE**

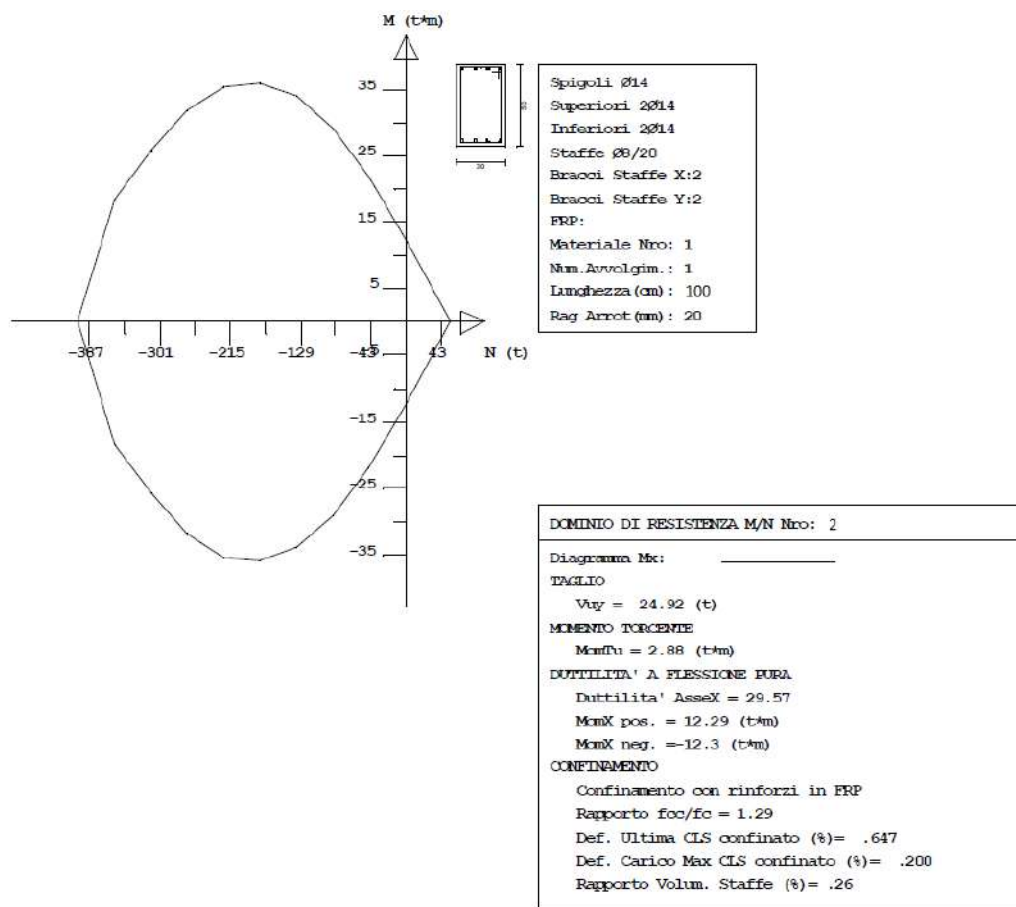
CARATTERISTICHE MECCANICHE	VALORI
<b>TIPO</b>	Tessuto MONODIREZIONALE in fibre di carbonio
<b>Grammatura</b>	300 g/ m <sup>2</sup>
<b>Massa volumica (kg/m<sup>3</sup>)</b>	1820
<b>Spessore equivalente di tessuto secco (mm)</b>	0.165
<b>Area resistente per unità di larghezza (mm<sup>2</sup>/m)</b>	165
<b>Resistenza meccanica a trazione (N/mm<sup>2</sup>)</b>	3000
<b>Carico massimo per unità di larghezza (kN/m)</b>	495
<b>Modulo elastico a trazione (N/mm<sup>2</sup>)</b>	300.000
<b>Allungamento a rottura (%) <math>\epsilon_{fk}</math></b>	1.3%
<b><math>\eta</math> (tabella 3.4) CNR-DT 200/04</b>	0.85
<b><math>\gamma_{fd}</math> rottura per delaminazione (tabella 3.2)</b>	1.2
<b><math>\gamma_{fd}</math> Rottura fibra (tabella 3.2)</b>	1.1
<b><math>\gamma_{RD}</math> Verifiche a taglio (tabella 3.3)</b>	1.2

**FIBRE DI CARBONIO FRP PILASTRO**

CARATTERISTICHE MECCANICHE	VALORI
<b>TIPO</b>	Tessuto QUADRIASSIALE in fibre di carbonio
<b>Grammatura</b>	300 g/ m <sup>2</sup>
<b>Massa volumica (kg/m<sup>3</sup>)</b>	1820
<b>Spessore equivalente di tessuto secco (mm)</b>	0.165
<b>Area resistente per unità di larghezza (mm<sup>2</sup>/m)</b>	165
<b>Resistenza meccanica a trazione (N/mm<sup>2</sup>)</b>	3000
<b>Carico massimo per unità di larghezza (kN/m)</b>	495
<b>Modulo elastico a trazione (N/mm<sup>2</sup>)</b>	300.000
<b>Allungamento a rottura (%) <math>\epsilon_{fk}</math></b>	1.3%
<b><math>\eta</math> (tabella 3.4) CNR-DT 200/04</b>	0.85
<b><math>\gamma_{fd}</math> rottura per delaminazione (tabella 3.2)</b>	1.2
<b><math>\gamma_{fd}</math> Rottura fibra (tabella 3.2)</b>	1.1
<b><math>\gamma_{RD}</math> Verifiche a taglio (tabella 3.3)</b>	1.2

**Test 1: Incremento del taglio resistente in corrispondenza di un estremo della trave (Circ2009 e Circ2019)**

In funzione del singolo strato di FRP incollato sulla trave, il software fornisce il seguente dominio (valido a prescindere dalla Circolare Esplicativa considerata):



*Domain of resistance calculated by the program*

The shear resistant at the end of the beam is therefore:

$$V_{uy} = 24.92 \text{ t}$$

It is calculated analytically the shear resistant “mechanism in tension”, using a different inclination of the cracks for the contribution of the FRP fibers and for the contribution of the stirrups.

Contribution stirrups inclination of the punch  $\cot(\theta) = 2.5$ :

$$V_{Rdw} = 0.9 \cdot f_{ydw} \cdot A_{st} \cdot \frac{d}{p} \cdot \cot \vartheta = 0.9 \cdot 3913 \cdot 1.00 \cdot \frac{46.5}{20} \cdot 2.5 = 20570 \text{ kg}$$

Contribution FRP (Maximum resistance of calculation fiber)  $\cot(\theta) = 1$ :

$$f_d = E_f \cdot \varepsilon_{fk} \cdot \eta / \gamma_{fd} = 300000 \cdot 0.013 \cdot 0.85 / 1.10 = 30136 \text{ kg/cm}^2$$

Mechanism of delamination (Guidelines 3.1):

$$l_e = \sqrt{\frac{E_f \cdot t_f}{2 \cdot f_{ctm}}} = \sqrt{\frac{300000 \cdot 0.165}{2 \cdot 1.03}} = 155 \text{ mm}$$

(units of measurement N and mm)

$K_b=1$  in safety

$$f_{fd} = \frac{0.24}{\gamma_{f,d} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{E_f \cdot k_b \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}}}{t_f}} = \frac{0.24}{1.2 \cdot \sqrt{1.5}} \sqrt{\frac{300000 \cdot 1 \cdot \sqrt{20 \cdot 1.03}}{t_f}} = 469.2 \text{ N/mm}^2 = 4692 \text{ kg/cm}^2$$

$$h_{min} = 46.5 - 20 = 26.5 \text{ cm (caso con FRP ad U trave emergente)}$$

$$\varphi_r = 0.2 + 1.6 \cdot \frac{r_c}{b_w} = 0.2 + 1.6 \cdot \frac{2}{30} = 0.306 \text{ Linee guida (3.25)}$$

$$f_{fed} = f_{df} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{l_e}{h_{min}}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{15.5}{26.5}\right) \text{ Linee guida (3.23)}$$

Per una fasciatura continua ( $w_f/p_f = 1$ ) e ortogonale all'asse ( $\cot \beta = 1$ ) si ottiene:

$$V_{Rdf} = \frac{1}{\gamma_{Rd}} 0.9 \cdot d \cdot f_{fed} \cdot 2 \cdot t_f \cdot \frac{w_f}{p_f} = \frac{1}{1.2} 0.9 \cdot 46.5 \cdot 3777 \cdot 2 \cdot 0.0165 \cdot 1 = 4347 \text{ kg Linee guida (3.21)}$$

Nell'ipotesi di considerare l'inclinazione delle fessure per il contributo FRP fissata a  $45^\circ$ :

$$V_{rt} = (V_{Rdw} + V_{Rdf}) = (20570 + 4347) = 24917 \text{ kg} = 24.92 \text{ t}$$

Valore identico a quello fornito dal software (cfr. dominio di resistenza 2, valore  $V_{uy}$ ).

### Test 2: Incremento di resistenza del pannello di nodo trave-pilastro

Al fine di tenere conto del contributo delle fibre, si utilizza il meccanismo resistente dei nodi non fessurati previsto dalla Circolare Esplicativa 2009 e successivamente modificato nella Circolare Esplicativa 2019. Si riportano entrambi i casi.

#### Circolare Esplicativa 2009

Il modello utilizzato prevede la presenza di elementi resistenti a trazione in parallelo alla resistenza del calcestruzzo, in modo tale da limitare le tensioni diagonali al valore  $0.3\sqrt{f_c}$ .

Riscrivendo opportunamente la formula C8.7.2.2, si ottiene:

$$\left| \frac{N}{2A_g} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_g}\right)^2 + \left(\frac{V_n}{A_g}\right)^2} \right| - \frac{A_{sh} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot h_{jw}} \leq 0.3\sqrt{f_c}$$

Al primo membro, il primo termine è uguale alla resistenza a trazione del calcestruzzo, il secondo termine rappresenta la resistenza a trazione addizionale dovuta al presidio utilizzato, dove:

-  $A_g$  indica la sezione orizzontale del nodo, quindi l'area del pilastro  $30 \times 40 = 1200 \text{ cm}^2$

-  $V_n$  indica il taglio totale agente sul nodo, dato dalla somma tra il taglio derivante dal pilastro superiore e quello dovuto alla sollecitazione di trazione nell'armatura longitudinale superiore della trave

-  $A_{sh}$  è l'area complessiva delle staffe o del tessuto presente sul nodo di altezza  $h_{jw}$ , per cui nel caso di FRP quadri assiale:

$$A_{sh} = h_{jw} \times (t_f + 2 \times t_f \times \cos(45^\circ))$$

- Il valore della resistenza  $f_{ywd}$  viene assunto pari alla resistenza del sistema FRP, limitando la deformazione massima al 0.4%, come previsto al punto 3.7.3.2.4 *Nodi* delle linee guida C.S.LL.PP.

$$f_{ywd} = 0.004 \times 3000000 = 12000 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{sh} \times f_{ywd} = 50 \times (0.0165 + 2 \times 0.0165 \times 0.71) \times 12000 = 23950 \text{ kg}$$

Questo equivale a una resistenza a trazione aggiuntiva pari a:



$$\frac{A_{sh} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot h_{jw}} = \frac{23950}{30 \cdot 50} = 15.97 \text{ kg/cmq}$$

I valori forniti dal software si leggono nella seguente tabella:

RISULTATI VERIFICHE NODI CLS - PUSH N.ro: 5 - Fx(+) Prop.Massa												
IDENTIFICATIVO			DIREZIONE 'X'						DIREZIONE 'Y'			
Filo N.ro	Quota (m)	Nod3d N.ro	Nsup (t)	Coll Nodo	TaglSup (t)	TrazAf (t)	SgmCo	SgmTr	RcLim	RtLim	DeltRt	
1	3,00	2	0,0	NO	0,0	0,0	0,0	0,0	66,7	11,0	15,9	
2	3,00	4	0,0	NO	0,0	23,5	-19,6	3,7	66,7	11,0	15,9	

Il contributo dei rinforzi vale 15.9 kg/cmq (vedi nella tabella *DeltRt*), pari alla resistenza a trazione aggiuntiva calcolata manualmente.

Effettuando i calcoli manuali e assumendo la trazione in assenza di rinforzo pari a 19,6 kg/cmq uguale alla compressione fornita dal software (vedi nella tabella *SgmCo*), si ottiene come sforzo di trazione sul calcestruzzo:

$$\left| \frac{N}{2A_g} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_g}\right)^2 + \left(\frac{V_n}{A_g}\right)^2} \right| - \frac{A_{sh} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot h_{jw}} = 19,6 - 15,9 = 3.7 \text{ kg/cmq}$$

valore identico a quello fornito dal software (vedi nella tabella *SgmTr*).

### Circolare Esplicativa 2019

In questo caso si utilizza la formula C8.7.2.11:

$$\left| \frac{N}{2A_j} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_j}\right)^2 + \left(\frac{V_j}{A_j}\right)^2} \right| - \frac{A_{sh} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot h_{jw}} \leq 0.3\sqrt{f_c}$$

All'apparenza uguale alla formula della precedente circolare ad eccezione del pedice j al primo termine, in tal caso aumenta il taglio agente e diminuisce l'area da considerare, infatti:

$-A_j = b_j \cdot h_{jc} = 23 \times 40 = 920 \text{ cmq}$  (cfr. §7.4.4.3.1 della norma)

$-V_j$  indica il taglio totale agente sul nodo, dato dalla somma tra il taglio derivante dal pilastro superiore e quello dovuto alle sollecitazioni sia di trazione sia di compressione nell'armatura longitudinale superiore della trave

In tal caso uno strato di FRP non è sufficiente per soddisfare la verifica, occorre quindi aggiungerne un secondo, ottenendo una resistenza a trazione aggiuntiva pari al doppio della precedente:

$$\frac{A_{sh} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot h_{jw}} = \frac{47900}{30 \cdot 50} = 31.94 \text{ kg/cmq}$$

I valori forniti dal software si leggono nella seguente tabella:

RISULTATI VERIFICHE NODI CLS - PUSH N.ro: 5 - Fx(+) Prop.Massa												
IDENTIFICATIVO			DIREZIONE 'X'						DIREZIONE 'Y'			
Filo N.ro	Quota (m)	Nod3d N.ro	Nsup (t)	Coll Nodo	TaglSup (t)	TrazAf (t)	SgmCo	SgmTr	RcLim	RtLim	DeltRt	
1	3.00	2	0.0	NO	0.0	29.3	-31.8	0.0	66.7	11.0	31.9	
2	3.00	4	0.0	NO	0.0	29.3	-31.9	0.0	66.7	11.0	31.9	

Il contributo dei rinforzi vale 31.9 kg/cmq (vedi nella tabella *DeltRt*), pari alla resistenza a trazione aggiuntiva calcolata manualmente.

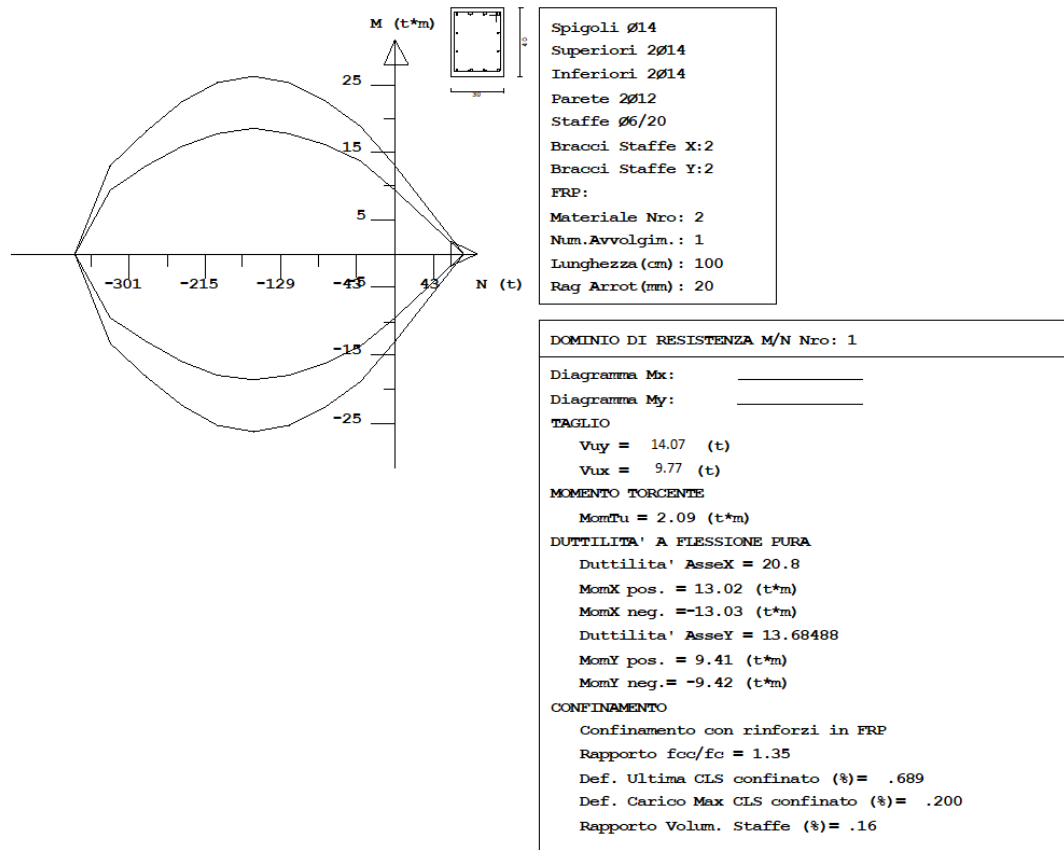
Effettuando i calcoli manuali e assumendo la trazione in assenza di rinforzo pari a 31,9 kg/cmq uguale alla compressione fornita dal software (vedi nella tabella *SgmCo*), si ottiene, come calcolato dal software (vedi nella tabella *SgmTr*), lo sforzo di trazione nullo sul calcestruzzo:

$$\left| \frac{N}{2A_j} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_j}\right)^2 + \left(\frac{V_j}{A_j}\right)^2} \right| - \frac{A_{sh} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot h_{jw}} = 31.9 - 31.9 = 0 \text{ kg/cmq}$$

### Test 3: Incremento di duttilità per confinamento del pannello di nodo trave-pilastro

#### Circolare Esplicativa 2009

Avendo disposto un singolo strato di FRP alle estremità del pilastro per soddisfare la verifica del nodo del test 2, il software fornisce in questo caso dei risultati diversi:



La deformazione ultima del calcestruzzo vale:

$$\varepsilon_{ccu} = 0.68\%$$

Per la valutazione del confinamento del composito si fa riferimento alle Linee Guida del C.S. LL.PP. capitolo 3.5: *Confinamento*.

$$\varepsilon_{fd,rid} = \min \left\{ \begin{array}{l} \eta_a \cdot \frac{\varepsilon_{fk}}{\gamma_f} = 0.95 \frac{0.013}{1.1} = 0.0112 \\ 0.6 \cdot \varepsilon_{fk} = 0.0078 \end{array} \right\} = 0.0078 \text{ Deformazione ridotta (cfr. Linee Guida 3.44)}$$

$$\rho_f = \frac{2 \cdot t_f \cdot (b+h) \cdot b_f}{b \cdot h \cdot p_f} = \frac{2 \cdot 0.0165 \cdot (30+40)}{30 \cdot 40} = 0.001925 ; b_f = p_f - f_{asciaturacontinua} \text{ (cfr. Linee Guida 3.41)}$$

$$b' = b - 2 \cdot r_c = 30 - 2 \cdot 2 = 26 \text{ cm}$$

$$h' = h - 2 \cdot r_c = 40 - 2 \cdot 2 = 36 \text{ cm}$$

$$K_h = 1 - \frac{b'^2 + h'^2}{3A_g} = 1 - \frac{26^2 + 36^2}{3 \cdot 30 \cdot 40} = 0.452 \text{ (cfr. Linee Guida 3.42)}$$

Pressione di confinamento (cfr. Linee Guida 3.34):

$$f_l = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_{fd,rid} = \frac{1}{2} \cdot 0.001925 \cdot 3000000 \cdot 0.0078 = 22.523 \text{ kg/cm}^2$$

Cfr. Linee Guida 3.33 3.35:

$$f_{leff} = f_l \cdot k_h \cdot k_v \cdot k_\alpha = 22.523 \cdot 0.452 \cdot 1 \cdot 1 = 10.185 \text{ kg/cm}^2$$

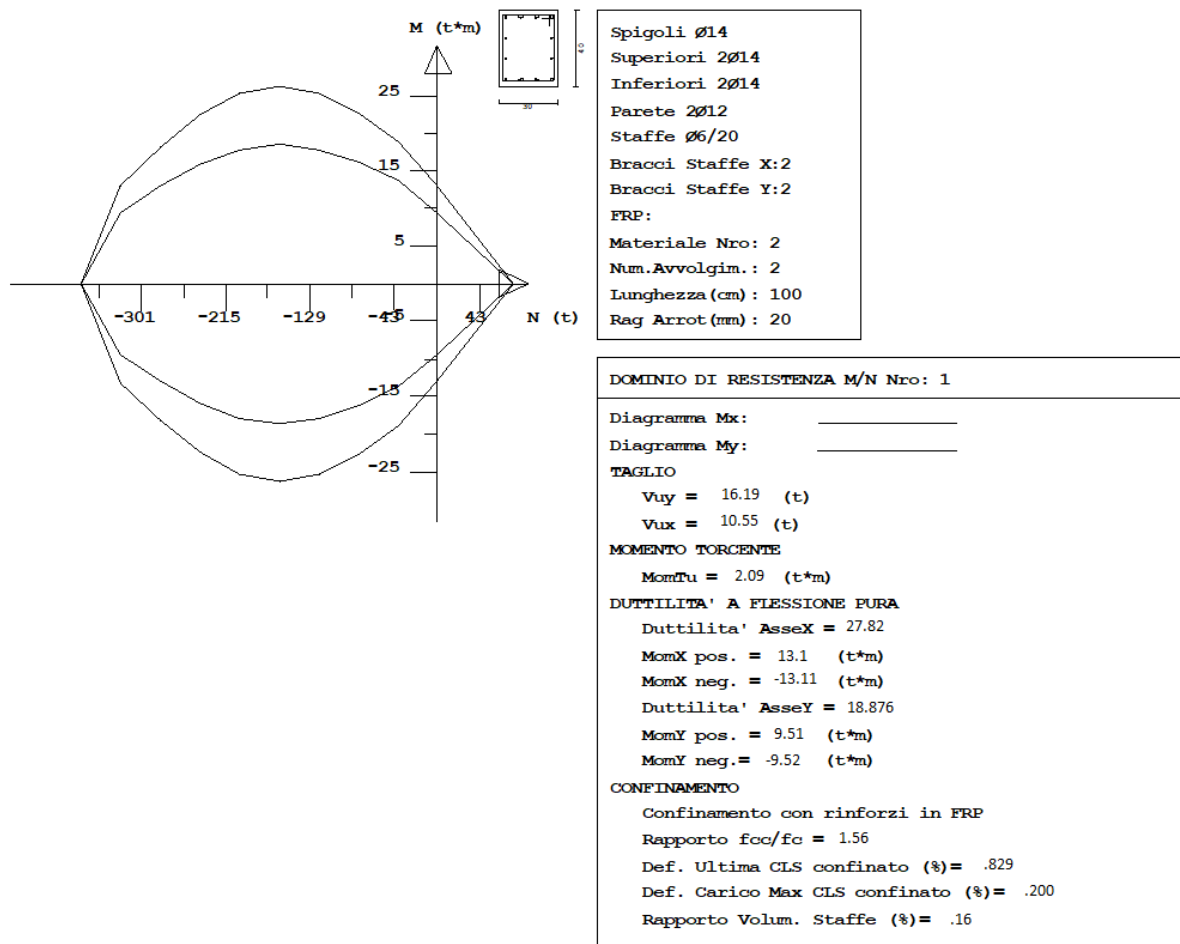
$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{f_{leff}}{f_c}} = 0.0035 + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{10.185}{200}} = 0.00689 \text{ (cfr. Linee Guida 3.43)}$$

Valore identico a quello fornito dal software (cfr. dominio di resistenza 1: Def. Ultima cls confinato).

Nell'applicazione della formula si è utilizzato il valore della resistenza del calcestruzzo senza ridurla del coefficiente parziale, trattandosi di utilizzo della deformazione in un'analisi non lineare.

### Circolare Esplicativa 2009

Avendo disposto due strati di FRP alle estremità del pilastro per soddisfare la verifica del nodo del test 2, il software fornisce in questo caso dei risultati diversi:



Considerando quindi un valore dello spessore  $t_f$  pari al doppio del precedente ( $0.0165 \times 2 = 0.033 mm$ ), vanno modificati alcuni calcoli:

$$\rho_f = \frac{2 \cdot 2t_f \cdot (b + h) \cdot b_f}{b \cdot h \cdot p_f} = \frac{2 \cdot 0.033 \cdot (30 + 40)}{30 \cdot 40} = 0.00385$$

$$f_l = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_{f,rid} = \frac{1}{2} \cdot 0.00385 \cdot 3000000 \cdot 0.0078 = 45.455 kg/cmq$$

$$f_{leff} = f_l \cdot k_h \cdot k_v \cdot k_\alpha = 45.455 \cdot 0.452 \cdot 1 \cdot 1 = 20.370 kg/cmq$$

$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{f_{leff}}{f_c}} = 0.0035 + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{20.370}{200}} = 0.00829$$

Valore identico a quello fornito dal software (cfr. dominio di resistenza 1: Def. Ultima cls confinato).

## Test di verifica n°30

### Resistenza a taglio in condizioni cicliche per travi e pilastri

Per gli elementi travi e pilastri per i quali l'armatura è inserita in input, è possibile attivare la verifica a taglio ciclico per strutture esistenti con la formula C8.7.2.8 della Circolare M.I.T. del 21/01/2019 n°7 pubblicata in G.U. n°35 l'11/02/2019. Questa formula tiene conto di tre contributi: il primo termine è legato allo sforzo normale (VNR), il secondo alla resistenza a trazione del calcestruzzo (VCR) e il terzo all'armatura a taglio (VWR). Separando tali contributi, la C8.7.2.8 si può scrivere come:

$$V_R = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR}$$

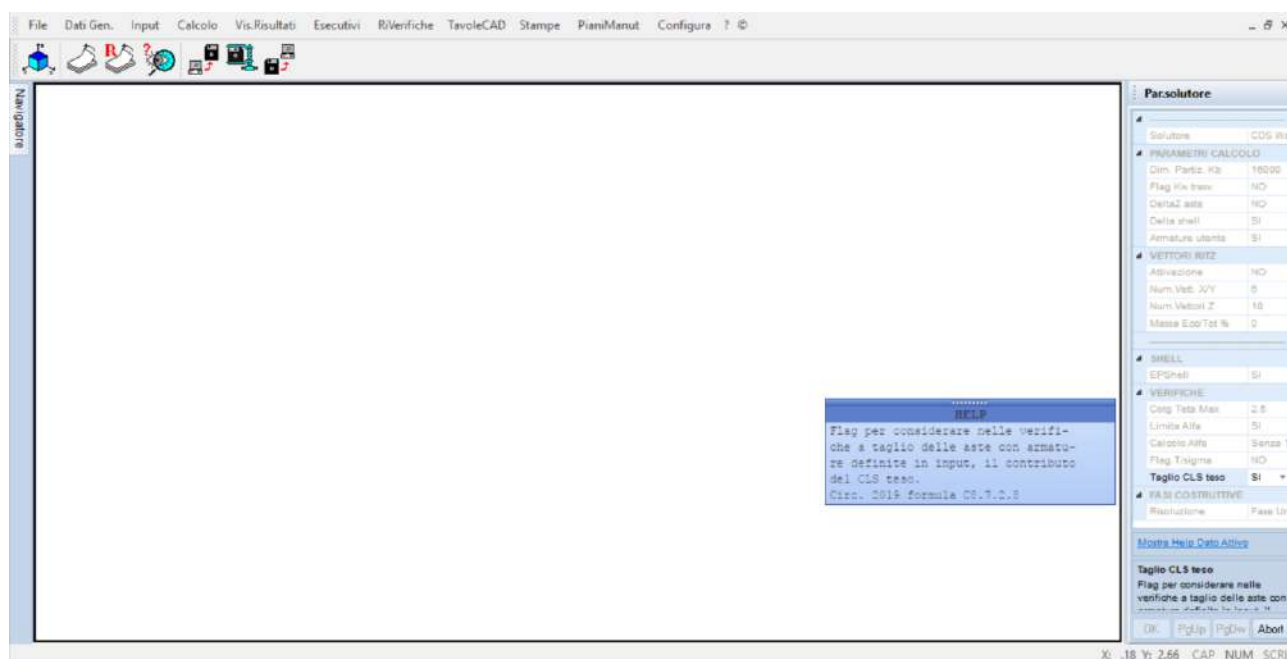
In maniera esplicita i tre termini sono:

$$V_{NR} = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot \frac{h - x}{2L_V} \cdot \min(N; 0.55 \cdot A_c \cdot f_c)$$

$$V_{CR} = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot \left(1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl})\right) \cdot (0.16 \cdot \max(0.5; 100 \cdot \rho_{tot})) \cdot \left(1 - 0.16 \cdot \min\left(5; \frac{L_V}{h}\right)\right) \cdot \sqrt{f_c} \cdot A_c$$

$$V_{WR} = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot \left(1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl})\right) \cdot V_W$$

In CDS l'attivazione del parametro *Taglio cls tes* interviene sul calcolo del taglio resistente per gli estremi degli elementi dove si possono attivare le cerniere plastiche. In mezzzeria si continuano ad utilizzare le formule del Capitolo 4 - Paragrafo 4.1.2.3.5.2 Elementi con armature trasversali resistenti al taglio.



La determinazione del taglio resistente, dipendendo dalle sollecitazioni agenti (per la presenza nelle formule dello sforzo normale e della luce di taglio, rapporto tra momento flettente e taglio) non fornisce un univoco valore in base all'armatura, ma un risultato variabile in base alla combinazione di carico in esame. Ciò comporta che la verifica della sezione, eseguita col confronto fra la sollecitazione agente e quella resistente, deve essere effettuata con valori diversi per ogni combinazione; inoltre non è detto che la combinazione più gravosa sia quella con le sollecitazioni più elevate, ma si ha in corrispondenza del valore massimo del rapporto tra sollecitazione agente e sollecitazione resistente (coefficiente d'impegno).

Si studia un caso pratico dell'applicazione della formula in questione, ponendo l'attenzione su due elementi strutturali, un pilastro (asta 1) e una trave (asta 5), al fine di determinarne il taglio resistente in condizioni cicliche.

**Applicazione della formula C8.7.2.8 al pilastro (asta 1)**

Si riporta la tabella di stampa del pilastro del quale si vuole calcolare manualmente il taglio resistente. Si può notare come la combinazione più gravosa nelle sezioni in testa e al piede sia la 12.

STAMPA PROGETTO S.L.U. - AZIONI S.L.V. - PILASTRI																																			
VERIFICA A PRESSO-FLESSIONE															VERIFICA A TAGLIO E TORSIONE																				
Filo	Quota	T	C																																
Iniz	Iniz.	r	Sez	o																															
Fin.	Final	a	Bas	n	Co	M	Ed	M	Eyd	N	Ed	x/	tf	tc	Area	cmq	Co	V	Ed	V	Eyd	T	Sdu	V	Rcd	V	Ryd	TRd	TRld	Coe	Coe	Alon	Staffe		
Ctg	N	Nc	t	Alt	c	mb	(t*m)	(t*m)	(t)	/d	100	100	b	h	mb	(t)	(t)	(t)	(t*m)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	Cls	Sta	cmq	Pas	Lun	Fi
1	0.00		1	18		-1.5		3.2		-12.9		11	11	4.5	4.5	12	3.3	0.7	0.0	3.2	3.0	1.0	0.0	24	100	0.0	25	30	6						
1	3.00		30	314		-0.5		-1.2		-23.6		0	4	4.5	4.5	12	3.3	0.7	0.0	4.5	4.5	1.0	0.0	24	73	0.0	25	200	6						
2.5	0.20		30	514		1.0		2.8		-23.3		5	8	4.5	4.5	12	3.3	0.7	0.0	4.7	7.5	1.0	0.0	24	69	0.0	25	30	6						

Tali risultati si possono riscontrare nella tabella seguente, nella quale sono riportate le sollecitazioni e il coefficiente di impegno per ciascuna combinazione di carico. La combinazione 12 è evidenziata poiché risulta la più gravosa, in quanto, come si può constatare, è quella con il coefficiente d'impegno più alto per entrambi gli estremi. Essendo il taglio un meccanismo fragile, il fattore di comportamento massimo adottabile è pari a 1.5; quindi, poiché il fattore di comportamento utilizzato nell'analisi è 2, i diagrammi del taglio nella fase di visualizzazione risultati non coincidono con i valori trovati nella tabella di verifica.

Il software avrebbe potuto accoppiare il taglio resistente minimo, per esempio 2512kg al piede in direzione x, con la corrispondente sollecitazione agente massima pari a 3259kg, determinando un coefficiente d'impegno 1.297; tale valore è decisamente in sicurezza, ma maggiore dell'1.004 determinato in maniera più rigorosa.

**Pilastro: asta numero 1**

Comb.	Imp.tes	VS <sub>x,tes</sub>	VR <sub>x,tes</sub>	VS <sub>y,tes</sub>	VR <sub>y,tes</sub>	Imp.pie	VS <sub>x,pie</sub>	VR <sub>x,pie</sub>	VS <sub>y,pie</sub>	VR <sub>y,pie</sub>
1	0.085	552	6422	-552	6422	0.059	552	9290	-552	9290
2	0.560	-2623	4676	349	16126	0.972	-2623	2697	349	2512
3	0.501	-2368	4725	604	6601	0.879	-2368	2694	604	2597
4	0.543	-2546	4689	425	10073	0.944	-2546	2696	425	2546
5	0.483	-2292	4742	680	6193	0.851	-2292	2692	680	2611
6	0.513	-2546	4963	-1240	3833	0.896	-2546	2842	-1240	3308
7	0.456	-2292	5020	-985	3686	0.807	-2292	2836	-985	3451
8	0.530	-2623	4948	-1316	3868	0.922	-2623	2843	-1316	3275
9	0.473	-2368	5001	-1062	3737	0.834	-2368	2838	-1062	3402
10	0.677	3183	4695	604	8117	0.979	3183	3249	604	2943
11	0.626	2928	4672	349	25475	0.895	2928	3268	349	2784
<b>12</b>	<b>0.693</b>	<b>3259</b>	<b>4701</b>	<b>680</b>	<b>7514</b>	<b>1.004</b>	<b>3259</b>	<b>3245</b>	<b>680</b>	<b>2969</b>
13	0.642	3005	4679	425	14048	0.921	3005	3262	425	2849
14	0.670	3259	4860	-985	4217	0.970	3259	3359	-985	3941

15	0.621	3005	4837	-1240	4383	0.889	3005	3376	-1240	3782
16	0.655	3183	4853	-1062	4274	0.946	3183	3363	-1062	3886
17	0.606	2928	4830	-1316	4421	0.865	2928	3382	-1316	3746
18	0.483	-680	6193	2292	4742	0.851	-680	2611	2292	2692
19	0.501	-604	6601	2368	4725	0.879	-604	2597	2368	2694
20	0.543	-425	10073	2546	4689	0.944	-425	2546	2546	2696
21	0.560	-349	16126	2623	4676	0.972	-349	2512	2623	2697
22	0.642	-425	14048	-3005	4679	0.921	-425	2849	-3005	3262
23	0.626	-349	25475	-2928	4672	0.895	-349	2784	-2928	3268
24	0.693	-680	7514	-3259	4701	1.004	-680	2969	-3259	3245
25	0.677	-604	8117	-3183	4695	0.979	-604	2943	-3183	3249
26	0.473	1062	3737	2368	5001	0.834	1062	3402	2368	2838
27	0.456	985	3686	2292	5020	0.807	985	3451	2292	2836
28	0.530	1316	3868	2623	4948	0.922	1316	3275	2623	2843
29	0.513	1240	3833	2546	4963	0.896	1240	3308	2546	2842
30	0.606	1316	4421	-2928	4830	0.865	1316	3746	-2928	3382
31	0.621	1240	4383	-3005	4837	0.889	1240	3782	-3005	3376
32	0.655	1062	4274	-3183	4853	0.946	1062	3886	-3183	3363
33	0.670	985	4217	-3259	4860	0.970	985	3941	-3259	3359

Dal momento che la formula del taglio resistente dipende dalle sollecitazioni agenti, i calcoli manuali verranno effettuati solo per la combinazione 12, considerando i quattro casi:

- pilastro in testa, direzione y
- pilastro in testa, direzione x
- pilastro al piede, direzione y
- pilastro al piede, direzione x

Dalla struttura di test si considerano i seguenti dati:

- coefficiente di sicurezza per elementi primari  $\gamma_{el}=1.15$
- resistenza di progetto del calcestruzzo  $f_{cd}=133\text{kg/cm}^2=13.3\text{MPa}$
- resistenza di progetto dell'acciaio  $f_{yd}=3304\text{kg/cm}^2$
- la parte plastica della domanda di duttilità in rotazione  $\mu_{\Delta,pl}$ , non essendo determinabile senza un'analisi non lineare trattandosi di una domanda di rotazione della cerniera plastica, è stata posta in sicurezza pari a 5 per verifiche nelle combinazioni sismiche; per quelle statiche, non essendo richiesta una duttilità,  $\mu_{\Delta,pl}=0$
- base  $b=30\text{cm}$
- altezza  $h=30\text{cm}$

- altezza utile  $d=30-3.2=26.8\text{cm}$
- area della sezione  $A_c=26.8 \cdot 30=804\text{cm}^2$
- armatura longitudinale totale  $12\phi 12=13.57\text{cm}^2$
- densità geometrica dell'armatura  $\rho_{\text{tot}}=13.57/804=1.69 \cdot 10^{-2}$
- area staffe  $2\phi 6=0.56\text{cm}^2$
- passo staffe  $25\text{cm}$

Le sollecitazioni in testa al pilastro nella combinazione 12 per determinare il taglio resistente in direzione y risultano le seguenti:

- sforzo normale  $N=-19978\text{kg}$
- momento flettente  $M_x=-24235\text{kg cm}$
- taglio  $T_y=430\text{kg}$

Si ricavano quindi le altre grandezze utili ai fini del calcolo del taglio resistente in condizioni cicliche. La profondità dell'asse neutro vale:

$$x = h \left( 0.25 + 0.85 \frac{N}{A_c \cdot f_c} \right) = 12.64\text{cm}$$

La luce di taglio si calcola come:

$$L_v = \frac{24235}{430} = 56.30\text{cm}$$

Per calcolare il contributo dello sforzo normale al taglio resistente, si ottiene:

$$0.55 \cdot A_c \cdot f_c = 58813\text{kg} > 19978\text{kg} = N$$

$$V_{NR} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{30.0 - 12.64}{2 \cdot 56.30} \cdot 19978 = 2736\text{kg}$$

Per determinare il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente, si calcolano separatamente i tre fattori.

Il coefficiente per la duttilità vale:

$$\left( 1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl}) \right) = 0.75$$

Il coefficiente per l'armatura longitudinale è:

$$(0.16 \cdot \max(0.5; 100 \cdot \rho_{\text{tot}})) = 0.27$$

Il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$\left( 1 - 0.16 \cdot \min\left(5; \frac{L_v}{h}\right) \right) = 0.70$$

dove:

$$\frac{L_v}{h} = 1.877 < 5$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.27 \cdot 0.70 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 804 = 3614\text{kg}$$

Infine si calcola il contributo delle staffe:

$$V_W = \frac{0.56}{25} \cdot 0.9 \cdot 26.8 \cdot 3304 = 1785\text{kg}$$

$$V_{WR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 1785 = 1164\text{kg}$$

Complessivamente, la resistenza a taglio in condizioni cicliche in direzione y in testa al pilastro considerato risulta:

$$V_{Ry} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 2736 + 3614 + 1164 = 7514\text{kg}$$

valore riscontrabile in tabella.

Si effettuano i calcoli in testa al pilastro con le sollecitazioni agenti in direzione x:

- sforzo normale  $N=-19978\text{kg}$
- momento flettente  $M_y=277547\text{kg cm}$
- taglio  $T_x=2524\text{kg}$

La profondità dall'asse neutro rimane invariata, essendo il pilastro di sezione quadrata. Rimangono invariati anche il coefficiente per la duttilità e quello per l'armatura longitudinale.

Si riportano quindi solo i valori numerici che cambiano.

La luce di taglio diventa:

$$L_V = \frac{277547}{2524} = 109.96\text{cm}$$

Quindi, il contributo dello sforzo normale al taglio resistente sarà:

$$V_{NR} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{30.0 - 12.64}{2 \cdot 109.96} \cdot 19978 = 1401\text{kg}$$

Poiché:

$$\frac{L_V}{h} = \frac{109.96}{26.8} = 3.67 < 5$$

il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$(1 - 0.16 \cdot 3.67) = 0.414$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.27 \cdot 0.414 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 804 = 2136\text{kg}$$

Il contributo delle staffe rimane lo stesso:

$$V_{WR} = 1164\text{kg}$$

Quindi la resistenza a taglio in condizioni cicliche in direzione x in testa al pilastro considerato risulta:

$$V_{Rx} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 1401 + 2136 + 1164 = 4701\text{kg}$$

anche questo riscontrabile in tabella.

Si analizzi adesso la condizione al piede del pilastro sempre in combinazione 12. Le sollecitazioni per determinare il taglio resistente in direzione y risultano le seguenti:

- sforzo normale  $N=-20563\text{kg}$
- momento flettente  $M_x=87700\text{kg cm}$
- taglio  $T_y=430\text{kg}$

La profondità dell'asse neutro vale:

$$x = 30.0 \cdot \left( 0.25 + 0.85 \frac{20563}{804 \cdot 133} \right) = 12.40\text{cm}$$

La luce di taglio si calcola come:

$$L_V = \frac{87700}{430} = 203.75\text{cm}$$

Per calcolare il contributo dello sforzo normale al taglio resistente, si ottiene:

$$0.55 \cdot A_c \cdot f_c = 58813\text{kg} > 20563\text{kg} = N$$

$$V_{NR} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{30.0 - 12.40}{2 \cdot 203.75} \cdot 20563 = 772\text{kg}$$

Anche in questo caso rimangono invariati il coefficiente per la duttilità e quello per l'armatura longitudinale.

Poiché:

$$\frac{L_V}{h} = \frac{203.75}{30.0} = 6.79 > 5$$

il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$(1 - 0.16 \cdot 5) = 0.20$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:



$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.27 \cdot 0.20 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 804 = 1033kg$$

Il contributo delle staffe rimane lo stesso:

$$V_{WR} = 1164kg$$

Complessivamente, la resistenza a taglio in condizioni cicliche in direzione y al piede del pilastro considerato risulta:

$$V_{Ry} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 772 + 1033 + 1164 = 2969kg$$

valore riscontrabile in tabella.

Infine, si effettuano i calcoli al piede del pilastro con le sollecitazioni agenti in direzione x.

- sforzo normale  $N=-20563kg$
- momento flettente  $M_y=378784kg\ cm$
- taglio  $T_x=2524kg$

La profondità dall'asse neutro rimane invariata, essendo il pilastro di sezione quadrata. Rimangono invariati anche il coefficiente per la duttilità e quello per l'armatura longitudinale.

La luce di taglio è:

$$L_V = \frac{378784}{2524} = 150.07cm$$

Quindi, il contributo dello sforzo normale al taglio resistente sarà:

$$V_{NR} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{30.0 - 12.64}{2 \cdot 150.07} \cdot 20563 = 1048kg$$

Poiché:

$$\frac{L_V}{h} = \frac{150.07}{26.8} = 5.60 > 5$$

il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$(1 - 0.16 \cdot 5) = 0.20$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.27 \cdot 0.20 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 804 = 1033kg$$

Il contributo delle staffe rimane lo stesso:

$$V_{WR} = 1164kg$$

Quindi la resistenza a taglio in condizioni cicliche in direzione x in testa al pilastro considerato risulta:

$$V_{Rx} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 1048 + 1033 + 1164 = 3245kg$$

anche questo riscontrabile in tabella.

### Applicazione della formula C8.7.2.8 alla trave (asta 5)

Si analizza di seguito il caso della trave, della quale si riporta la tabella di stampa. Da questa si può notare che, data la simmetria della struttura e dei carichi agenti, i risultati più gravosi nella sezione iniziale in combinazione 12 sono uguali a quelli nella sezione finale in combinazione 2. Si può quindi analizzare solo uno dei due estremi nella rispettiva combinazione.

STAMPA PROGETTO S.L.U. - AZIONI S.L.V. - ELEVAZIONE																																	
VERIFICA A PRESSO-FLESSIONE															VERIFICA A TAGLIO E TORSIONE																		
Filo	Quota	T	C																														
Iniz	Iniz.	r	Sez	o																													
Fin.	Final	a	Bas	n	Co	M	Exd	M	Eyd	N	Ed	x/	sft	tc	Area	cmq	Co	V	Exd	V	Eyd	T	Sdu	V	Rxd	V	Ryd	TRd	TRld	Coe	Coe	ALon	Staffe
Ctg	AmpC	t	Alt	c	mb	(t*m)	(t*m)	(t)	/d	100	100	sup	inf	mb	(t)	(t)	(t*m)	(t)	(t)	(t)	(t*m)	(t*m)	Cls	Sta	cmq	Pas	Lun	Fi					
1	3.00		2	1	2	4.1	0.0	0.0	27	999	999	4.5	2.3	12	0.0	6.0	0.0	5.6	3.2	1.8	0.0	26	185	0.0	20	40	6						
2	3.00		30	3	2	2.9	0.0	0.0	27	9	4	2.3	4.5	2	0.0	-3.6	0.0	3.7	5.1	1.2	0.0	16	70	0.0	30	320	6						
2.5	1.00		40	5	2	-6.6	0.0	0.0	27	999	999	4.5	2.3	2	0.0	-6.0	0.0	5.6	3.2	1.8	0.0	26	185	0.0	20	40	6						

Come nel caso del pilastro, tali risultati si possono riscontrare nella tabella seguente, nella quale sono specificati, per ciascuna combinazione, il coefficiente di impegno e le sollecitazioni ai due estremi della trave. La combinazione 2 per il primo estremo e la combinazione 12 per il secondo sono evidenziate perché risultano le più gravose.

**Trave: asta numero 5**

Comb.	Imp.ini	VS <sub>y,ini</sub>	VR <sub>y,ini</sub>	Imp.fin	VS <sub>y,fin</sub>	VR <sub>y,fin</sub>
1	0.443	4158	9380	0.443	-4158	9380
<b><u>2</u></b>	0.468	-1177	2515	<b><u>1.847</u></b>	<b><u>-5973</u></b>	<b><u>3234</u></b>
3	0.347	-873	2515	1.735	-5669	3267
4	0.431	-1086	2515	1.813	-5882	3243
5	0.310	-782	2515	1.701	-5578	3278
6	0.431	-1086	2515	1.813	-5882	3243
7	0.310	-782	2515	1.701	-5578	3278
8	0.468	-1177	2515	1.847	-5973	3234
9	0.347	-873	2515	1.735	-5669	3267
10	1.813	5882	3243	0.431	1086	2515
11	1.701	5578	3278	0.310	782	2515
<b><u>12</u></b>	<b><u>1.847</u></b>	<b><u>5973</u></b>	<b><u>3234</u></b>	0.468	1177	2515
13	1.735	5669	3267	0.347	873	2515
14	1.847	5973	3234	0.468	1177	2515
15	1.735	5669	3267	0.347	873	2515
16	1.813	5882	3243	0.431	1086	2515
17	1.701	5578	3278	0.310	782	2515
18	0.282	1187	4195	0.997	-3609	3619
19	0.297	1278	4303	0.965	-3518	3642
20	0.329	1491	4521	0.892	-3305	3701
21	0.347	1583	4559	0.861	-3213	3728
22	0.329	1491	4521	0.892	-3305	3701
23	0.347	1583	4559	0.861	-3213	3728

24	0.282	1187	4195	0.997	-3609	3619
25	0.297	1278	4303	0.965	-3518	3642
26	0.892	3305	3701	0.329	-1491	4521
27	0.861	3213	3728	0.347	-1583	4559
28	0.997	3609	3619	0.282	-1187	4195
29	0.965	3518	3642	0.297	-1278	4303
30	0.997	3609	3619	0.282	-1187	4195
31	0.965	3518	3642	0.297	-1278	4303
32	0.892	3305	3701	0.329	-1491	4521
33	0.861	3213	3728	0.347	-1583	4559

Per l'applicazione numerica sulla trave in esame, si considerino i seguenti dati:

- coefficiente di sicurezza per elementi primari  $\gamma_{el}=1.15$
- resistenza di progetto del calcestruzzo  $f_{cd}=133\text{kg/cm}^2=13.3\text{MPa}$
- resistenza di progetto dell'acciaio  $f_{yd}=3304\text{kg/cm}^2$
- parte plastica della domanda di duttilità  $\mu\Delta, pl=5$
- base  $b=30\text{cm}$
- altezza  $h=40\text{cm}$
- altezza utile  $d=40-3.2=36.8\text{cm}$
- area della sezione  $A_c=36.8 \cdot 30=1104\text{cm}^2$
- armatura longitudinale totale  $4\phi 12+2\phi 12=6.79\text{cm}^2$
- densità geometrica dell'armatura  $\rho_{tot}=6.79/1104=0.615 \cdot 10^{-2}$
- area staffe  $2\phi 6=0.56\text{cm}^2$
- passo staffe  $20\text{cm}$

Si prendono in considerazione le sollecitazioni nell'estremo finale della trave (asta 5) nella combinazione 2; poiché la trave ha comportamento flessionale nel piano verticale, le sollecitazioni da considerare sono solo quelle in direzione y:

- sforzo normale  $N=0\text{kg}$
- momento flettente  $M_x=662437\text{kg cm}$
- taglio  $T_y=5080\text{kg}$

Se ne deduce che per la trave in questione va analizzato un unico caso: solo la direzione y per il comportamento flessionale della trave, solo un estremo per la simmetria della struttura e dei carichi agenti.

Si ricavano quindi le grandezze utili ai fini del calcolo del taglio resistente in condizioni cicliche.

La profondità dell'asse neutro vale:

$$x = 40 \left( 0.25 + 0.85 \frac{0}{1104 \cdot 133} \right) = 10.00\text{cm}$$

La luce di taglio è:

$$L_v = \frac{662437}{5080} = 130.40\text{cm}$$

Poiché nella trave lo sforzo normale è nullo, il suo contributo al taglio resistente sarà anch'esso nullo:

$$0.55 \cdot A_c \cdot f_c = 80758\text{kg} > 0\text{kg} = N$$

$$V_{NR} = 0\text{kg}$$

Per determinare il contributo del calcestruzzo al taglio resistente, si calcolano separatamente i tre fattori.

Il coefficiente per la duttilità vale ancora:

$$(1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl})) = 0.75$$

Il coefficiente per l'armatura longitudinale è:

$$(0.16 \cdot \max(0.5; 0.615)) = 0.10$$

Poiché:

$$\frac{L_V}{h} = \frac{130.40}{40} = 3.26 < 5$$

il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$(1 - 0.16 \cdot 3.26) = 0.48$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.10 \cdot 0.48 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 1104 = 1235kg$$

Infine si calcola il contributo delle staffe:

$$V_W = \frac{0.56}{20} \cdot 0.9 \cdot 36.8 \cdot 3304 = 3064kg$$

$$V_{WR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 3064 = 1998kg$$

Complessivamente, la resistenza a taglio in condizioni cicliche della trave risulta:

$$V_{Ry} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 0 + 1235 + 1998 = 3234kg$$

valore riscontrabile in tabella.

## Appendice A

### Rapporti tra le unità anglosassoni e quelle metriche

Generalmente i simboli americani ed inglesi, relativi alle unità di misura, si trovano scritti in modo non omogeneo in parte con lettere maiuscole (p.e. Lb) oppure minuscole (lb.) e nel plurale viene talvolta inserita una s (lbs).

Nella tabella che segue vengono riportate le principali unità di misura anglosassoni con relativi fattori di conversione per il sistema SI.

<i>Grandezza fisica</i>	<i>Unità anglosassone</i>	<i>Relazioni con le unità metriche</i>
<i>Lunghezza l</i>	<i>Inch (pollice)</i> <i>Foot (piede)</i> <i>Mile (miglio)</i>	<i>1 in. = 25.40 mm</i> <i>1 ft. = 30.48 cm</i> <i>1 ml. = 1.6093 Km</i>
<i>Superficie A</i>	<i>Square inch</i> <i>Square foot</i>	<i>1 sq. In. = 6.4516 cm<sup>2</sup></i> <i>1 sq. Ft. = 929.03 cm<sup>2</sup></i>
<i>Volume V</i>	<i>Cubic inch</i> <i>Cubic foot</i>	<i>1 cu. In. = 16.387 cm<sup>3</sup></i> <i>1 cu. Ft. = 28.317 cm<sup>3</sup></i>
<i>Velocità v</i>	<i>Foot/second</i> <i>Mile/hour</i>	<i>1 ft./sec. = 0.3048 m/s</i> <i>1 mi./hr. = 1.6093 Km/h</i>
<i>Accelerazione a</i>	<i>Foot/second<sup>2</sup></i>	<i>1 ft./sec<sup>2</sup> = 30.48 cm/s<sup>2</sup></i> <i>32.17 ft./sec<sup>2</sup> = 981 cm/s<sup>2</sup></i>
<i>Forza peso F</i>	<i>Grain</i> <i>Ounce</i> <i>Pound</i> <i>Kip (1000 lb)</i>	<i>1 gr. = 0.068 g</i> <i>1 oz. = 28.35 g</i> <i>1 lb. = 0.45359 Kg</i> <i>1 Kip = 453.6 Kg</i>
<i>Temperatura t</i>	<i>Degree Fahrenheit</i> <i>Degree Rankine</i>	<i>°F = 9/5°C + 32</i> <i>°Rank = -273.15°C</i>
<i>Pressione p</i>	<i>Pound/square foot</i> <i>Pound/square inch</i>	<i>1 lb./sq. Ft. = 48.82 N/m<sup>2</sup></i> <i>1 psi = 0,07030696 Kg/cm<sup>2</sup></i>
<i>Densità q</i>	<i>Pound/ cubic inch</i> <i>Pound/ cubic foot</i>	<i>1 lb./cu. In. = 27.66 g/cm<sup>3</sup> (Kg/l)</i> <i>1 lb./cu. Ft. = 16.019 Kg/m<sup>3</sup></i>
<i>Frequenza ω</i>	<i>Cycle/second (1Hertz)</i>	<i>1 cycle/sec = 6.283185 rad/s</i>

**Carichi**

- Carichi per unità di lunghezza**

<i>1 pound per inch = 1 lb. /in.</i>	<i>17.858 Kg/m = 175.187 N/m</i>
<i>1 pound per foot = 1 lb. /ft.</i>	<i>1.488 Kg/m = 14,597 N/m</i>
<i>1 Kilopound per foot = 1 Kip /ft.</i>	<i>1.488 t/m = 14,597 KN/m</i>

- Carichi per unità di lunghezza**

<i>1 pound per square inch = 1 psi= 1 lb. /in.<sup>2</sup></i>	<i>0.6896 N/cm<sup>2</sup></i>
<i>1 pound per square foot = 1 psf= 1 lb. /ft.<sup>2</sup></i>	<i>4.8826 Kg/m<sup>2</sup> = 47.8983 N/m<sup>2</sup></i>
<i>1 Kilopound per square inch = 1 Kip /ft.</i>	<i>157.4810 Kg/cm<sup>2</sup> = 1544.889 N/cm<sup>2</sup></i>

- Momenti**

<i>1 inch<sup>3</sup> = 1 in. <sup>3</sup>= Momento resistente</i>	<i>16.387 cm<sup>3</sup></i>
<i>1 inch<sup>4</sup> = 1 in. <sup>4</sup>= Momento d'inerzia</i>	<i>41.623 cm<sup>4</sup></i>
<i>1 pound inch = 1 lb. in.</i>	<i>1.152 Kg cm = 11.301 N cm</i>
<i>1 pound foot = 1 lb. ft. = 12 lb. in.</i>	<i>13.825 Kg cm = 135.623 N cm</i>

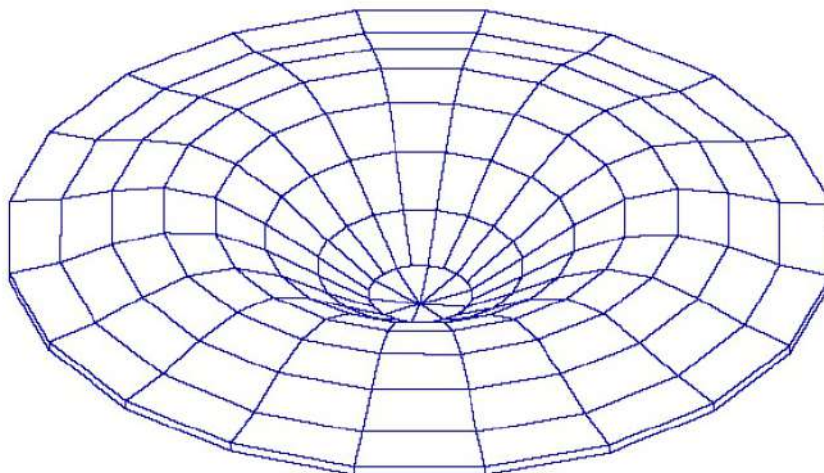
**Bibliografia**

- [ 1 ] A&C- Analisi e calcolo n° 5, Apr.-Giu. 2001
- [ 2 ] A&C- Analisi e calcolo n° 6, Lug.-Set. 2001
- [ 3 ] A&C- Analisi e calcolo n° 8, Gen.-Mar. 2002
- [ 4 ] Timoshenko, Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems 3rd Edition. D. Van Nostrand Co., Inc. New York, N. 1955.
- [ 5 ] W. Nash, Strength of Material
- [ 6 ] Tuma, J.J., Munsie, R.K., Theory and Problems of Advanced Structural Analysis, Schaums's Outline Series, McGraw-Hill
- [ 7 ] Seely, F. B., and Smith, J.O., "Advanced Mechanics of Materials", Second Edition, John Wiley and Sons
- [ 8 ] NAFEMS, Background to Benchmarks, 1993.
- [ 9 ] Crandall, An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill Book Co., Inc.. New York, NY. 1959.
- [ 10 ] Cremonese, Manuale Ingegneria Civile, ESAC, SEZ. I e II
- [ 11 ] Ray, W. Clough, Joseph Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill Book Company
- [ 12 ] Thomson, Vibration Theory and Applications
- [ 13 ] Blevins, Robert D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," Van Nostrand Reinhold Company, 1979
- [ 14 ] The STANDARD NAFEMS Benchmarks, TNSB, Rev. 3, 5 October, 1990
- [ 15 ] Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", Second Edition, McGraw-Hill, 1959, pg. 113 - 117.
- [ 16 ] CISM International Centre For Mechanical Sciences – Analisi per elementi finite: Modellazione strutturale e controllo dei risultati. A cura di B. A. Schrefler – A. A. Camaro

***C.D.Gs. Win***

*Release 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 e 2018*

***Validazione del codice di calcolo***







# VERIFICA DI PORTANZA DELLE FONDAZIONI

## Descrizione esempio

Allo scopo di verificare l'accuratezza dei risultati forniti dal software *C.D.Gs. Win* si procede al calcolo manuale di verifica di portanza della fondazione del telaio a campata unica fondato su trave rovescia rappresentato in figura 1. La trave di fondazione ha lunghezza  $L = 5 [m]$ . Le caratteristiche geometriche della sezione trasversale sono rappresentate sempre in figura 1. In particolare l'altezza totale è  $h = 0.6 [m]$  e la larghezza del magrone è  $B = 0.9 [m]$ .

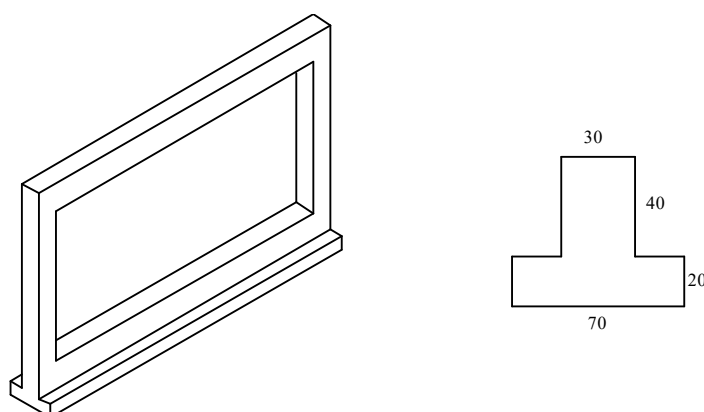


Fig. 1. Telaio fondato su trave rovescia

Il telaio è soggetto ad un carico verticale linearmente distribuito applicato sulla trave in elevazione  $q_v = -1.5 [t/m]$ . Nell'analisi sono stati trascurati gli effetti dovuti al peso proprio degli elementi strutturali.

Le caratteristiche meccaniche del suolo di fondazione sono riportate nella tabella I e confermato dalla tabella di stampa di *C.D.Gs. Win* di seguito riportata:

Peso specifico	$\gamma = 1800 [kg/m^3]$
Angolo d'attrito	$\varphi = 35^\circ = 0.611 [rad]$
Coesione	$c = 0.1 [kg/cm^2]$
Modulo elastico	$E = 500 [kg/cm^2]$
Rapporto di <i>Poisson</i>	$\nu = 0.2$

Tab. I. Parametri meccanici suolo di fondazione

PARAMETRI GEOTECNICI TRAVI WINKLER													
IDENTIFICATIVO				CONDIZIONE DRENATA								NON DRENATA	
Trave N.ro	Infiss m	Tipo Tabel	Gamma kg/mc	Fi' Grd	C' kg/cmq	Mod. El kg/cmq	Poisson	P base kg/cmq	Indice Rigid.	IndRig Crit.	Cu kg/cmq	P base kg/cmq	
1	0.60	M1	1800	35.00	0.10	500.00	0.20	0.11	896.68	242.38	0.10	0.11	

Per la fondazione sono stati fissati affondamento e ricoprimento nulli. Si prevede quindi che il piano di campagna sia coincidente con l'estradosso delle fonazioni, con una distanza fra i piani di

campagna e di posa delle fondazioni  $D = h = 0.6 [m]$ .

## Carico sollecitante

Il risultato complessivo delle forze scaricate in fondazione dal telaio è:

$$R_v = |q_v| \cdot l = 1.5 [t/m] \cdot 5 [m] = 7.5 [t] = 7500 [kg]$$

Tale risultato è in accordo con quello fornito dal software, come mostrato dalla tabella di stampa di seguito riportata (anche in *C.D.Gs. Win* si è trascurato il peso proprio):

RISULTANTI SOLLECITAZIONI TRAVI WINKLER						
Trave N.ro	Combinazione N.ro	Rv (kg)	Vx (kg)	Vy (kg)	Mrx kg*cm	Mry kg*cm
1	A1 / 1	7500	0	0	0	0

## Test di validazione formulazione classica

Il carico limite del terreno  $q_{lim}$ , da confrontare con il risultato delle forze scaricate in fondazione  $R_v$ , è determinato con la formula di *Brinch-Hansen*:

$$q_{lim} = q \cdot N_q \cdot \Psi_q \cdot i_q \cdot d_q \cdot b_q \cdot g_q \cdot s_q + c \cdot N_c \cdot \Psi_c \cdot i_c \cdot d_c \cdot b_c \cdot g_c \cdot s_c + \frac{1}{2} \gamma \cdot B' \cdot N_\gamma \cdot \Psi_\gamma \cdot i_\gamma \cdot b_\gamma \cdot s_\gamma$$

Sono di seguito valutati tutti i coefficienti presenti nella formula di Brinch-Hansen nel caso di condizione drenata.

## Carico sul piano di fondazione

$$q = \gamma \cdot D = 1080 [kg]$$

## Fattori di capacità portante

$$N_q = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \exp \{ \pi \tan(\varphi) \} = 33.296$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan(\varphi)} = 46.123$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan(\varphi) = 48.028$$

### ***Coefficienti di punzonamento***

$$\Psi_q = \Psi_\gamma = \exp\left\{\left(0.6\frac{B}{L} - 4.4\right)\tan(\varphi) + 3.07\frac{\sin(\varphi) \cdot \log(2I_R)}{1 + \sin(\varphi)}\right\} = 1$$

$$\Psi_c = \Psi_q - \frac{1 - \Psi_q}{N_q \tan(\varphi)} = 1$$

Nelle precedenti si è posto:

$$I_R = \frac{G}{c + q'\tan(\varphi)} = 896.677 \leq I_{CR}$$

con:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 208.333 [kg/cm^2] \quad ; \quad q' = \gamma\left(D + \frac{B}{2}\right) = 1890 [kg]$$

$$I_{CR} = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{3.3 - 0.45\frac{B}{L}}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right\} = 242.377$$

### ***Coefficienti di inclinazione del carico***

$$i_q = \left(1 - \frac{H}{N + B \cdot L \cdot c \cdot \cotg(\varphi)}\right)^m = 1$$

$$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_c \cdot \tan(\varphi)} = 1$$

$$i_\gamma = \left(1 - \frac{H}{N + B \cdot L \cdot c \cdot \cotg(\varphi)}\right)^{m+1} = 1$$

Nelle precedenti si è posto:

$$m = m_B \cos^2(\vartheta) + m_L \sin^2(\vartheta) = 1.847$$

$$m_B = \frac{2 + \frac{B}{L}}{1 + \frac{B}{L}} = 1.847 \quad ; \quad m_L = \frac{2 + \frac{L}{B}}{1 + \frac{L}{B}} = 1.153 \quad ; \quad \vartheta = \tan^{-1} \left( \frac{Fh_B}{Fh_L} \right) = 0$$

essendo  $Fh_B = 0$  ed  $Fh_L = 0$  le forze orizzontali lungo  $B$  ed  $L$ ,  $H = \sqrt{Fh_B^2 + Fh_L^2} = 0$  il risultante di tali forze ed  $N = R_v = 7500 [kg]$  il risultante delle forze verticali.

### ***Coefficienti di affondamento del piano di posa***

$$d_q = 1 + 2 \frac{D}{B} \tan(\varphi) \cdot (1 - \sin(\varphi))^2 = 1.17$$

$$d_c = d_q - \frac{1 - d_q}{N_c \tan(\varphi)} = 1.175$$

### ***Coefficienti di inclinazione del piano di posa***

$$b_q = b_\gamma = \exp \{ -2.7 \cdot \alpha \cdot \tan(\varphi) \} = 1$$

$$b_c = \exp \{ -2 \cdot \alpha \cdot \tan(\varphi) \} = 1$$

essendo  $\alpha = 0$  l'inclinazione del terreno di fondazione

### ***Coefficienti di inclinazione del terreno di fondazione***

$$g_q = g_c = 1$$

### ***Coefficienti di forma***

$$s_q = 1 + \frac{B}{L} \tan(\varphi) = 1.126$$

$$s_c = 1 + \frac{B}{L} \frac{N_q}{N_c} = 1.13$$

$$s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B}{L} = 0.928$$

# Carico limite

Sostituendo i coefficienti determinati nella formula di *Brinch-Hansen* si ha:

$$q_{lim} = 144.69 \left[t / m^2 \right]$$

Il carico limite della fondazione si determina quindi moltiplicando  $q_{lim}$  per la superficie di impronta della fondazione e dividendolo per il coefficiente parziale  $\gamma_R = 2.3$ , e risulta:

$$Q_{lim} = \frac{q_{lim} \cdot B \cdot L}{\gamma_R} = 283.09 \left[t \right]$$

I risultati ottenuti risultano coincidenti con quelli forniti dal software *C.D.Gs. Win* di seguito riportati:

COEFFICIENTI DI PORTANZA TRAVI WINKLER - CONDIZIONI DRENATE																				
Trave N.ro	Brinch Hansen			Incl. terreno			Igk Sism	Comb N.ro	Coeff.Incl.Carico			Affondamento			Forma			Punzonamento		
	Nc	Nq	Ng	Gc	Gq	Gg			IcV	IqV	IgV	Dc	Dq	Dg	Sc	Sq	Sg	Psic	Psig	Psig
1	46.12	33.30	48.03	1.00	1.00	1.00	1.00	A1/1	1.00	1.00	1.00	1.18	1.17	1.00	1.13	1.13	0.93	1.00	1.00	1.00

PORTANZA TRAVI WINKLER														
IDENTIIFICATIVO					DRENATE		NON DRENATE		RISULTATI					
Trave N.ro	Asta3d N.ro	Comb N.ro	Bx' m	By' m	GamEf kg/mc	QLimV (t)	GamEf kg/mc	QLimV (t)	N (t)	Coeff. Sicur.	Minimo CoeSic	N/Ar kg/cmq	QLim/Ar kg/cmq	Status Verifica
1	4	A1 / 1	0.90	5.00	1800	283.1			7.5	2.04	2.04	0.17	0.34	OK

## Descrizione metodo di verifica non lineare

Il metodo di verifica proposto consiste nella valutazione del coefficiente di sicurezza  $\lambda_u$  dell'insieme terreno-fondazione, definito come:

$$\lambda_u = \frac{R_d}{E_d}$$

Per la valutazione del coefficiente  $\lambda_u$  è condotta un'analisi non lineare sulla sottostruttura, estrapolata dall'intero sistema strutturale, composta dagli elementi di fondazione ipotizzati come elastici e poggianti su suolo a comportamento non lineare.

Sul sistema strutturale così costruito è applicato un sistema di forze nodali determinate come gli scarichi in fondazione derivanti dalla sovrastruttura. L'analisi è condotta facendo crescere monotonamente le forze applicate sulla sottostruttura di fondazione fino al raggiungimento di uno stato limite geotecnico o strutturale.

Tale procedura consente quindi la determinazione del moltiplicatore a rottura dei carichi agenti, che ovviamente coincide con il coefficiente di sicurezza  $\lambda_u$ .

Come descritto, per eseguire la verifica di portanza delle fondazioni viene estrapolata dall'intero sistema strutturale una sottostruttura di fondazione. Questa è composta da tutti gli elementi strutturali a contatto con il suolo (travi rovesce, platee e plinti diretti o su pali) e da quelli che, pur non essendo elementi di fondazione, giacciono interamente sul medesimo piano di posa di almeno un elemento di fondazione.

Gli elementi strutturali che compongono la sottostruttura di fondazione sono modellati a comportamento elastico lineare e, se a contatto con il suolo, schematizzati come poggianti su un letto di molle a comportamento non lineare nei riguardi della componente verticale di spostamento ed elastico per le altre componenti di spostamento.

I legami costitutivi forza-spostamento ( $p-u$ ) delle molle non lineari utilizzate per modellare il suolo sono del tipo elasto-plastico. In particolare nel caso di fondazioni superficiali (travi rovesce, platee, plinti diretti) il legame costitutivo è non resistente a trazione (Fig 2 a), mentre per i pali è esteso anche nel verso delle trazioni, con andamento differente rispetto a quello delle compressioni (Fig 2 b).

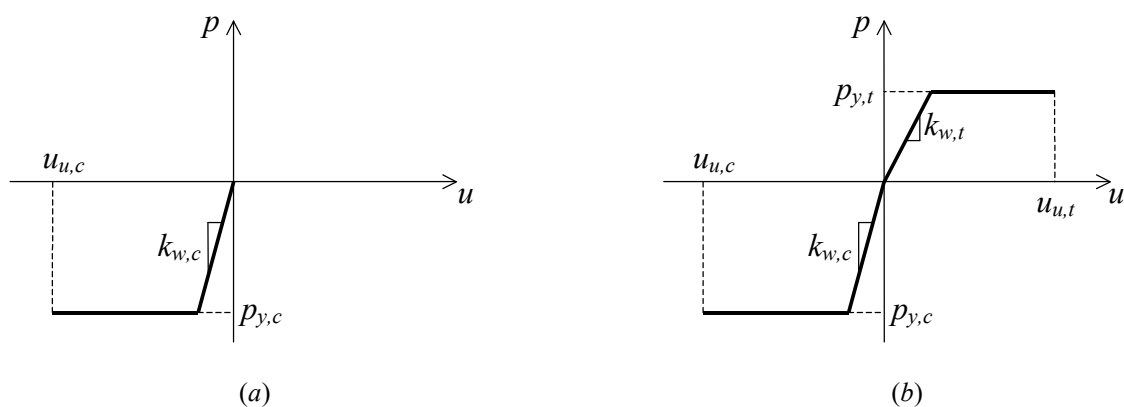


Fig. 2. Legami costitutivi molle non lineari: a) fondazioni superficiali; b) pali.

Per le fondazioni superficiali la rigidezza  $k_{w,c}$  del tratto elastico del legame è valutata a partire dalla costante di *Winkler* del terreno tenendo conto della superficie di impronta di competenza della

singola molla. Per le fondazioni profonde le rigidezze  $k_{w,c}$  e  $k_{w,t}$  sono invece determinate tenendo conto sia delle caratteristiche del terreno che della geometria del singolo palo.

I valori di limite elastico  $p_{y,c}$  e  $p_{y,t}$  della forza sono dedotte dal valore  $Q_{lim}$  del carico limite calcolato con le normali teorie di *Brinch-Hansen* e *Vesic* non effettuando però la riduzione della superficie di impronta efficace di contatto fra fondazione e terreno.

Così come previsto da normativa sono eseguite verifiche agli stati limite ultimi sia del suolo di fondazione (SLU di tipo GEO) che degli elementi strutturali (SLU di tipo STR).

In particolare si assume che sia stato raggiunto lo stato limite ultimo del terreno se lo spostamento sotto una delle molle non lineari attinge al valore ultimo  $u_{u,c}$  o  $u_{u,t}$ . Inoltre si ha lo stato limite ultimo nel terreno se tutte le molle che modellano il suolo hanno raggiunto la fase plastica del legame costitutivo. In questa condizione infatti non è più possibile equilibrare ulteriori incrementi di carico.

Per quanto riguarda gli elementi strutturali, essendo questi ipotizzati a comportamento elastico lineare, la verifica allo stato limite è ricondotta ad una verifica degli spostamenti relativi. Lo stato limite ultimo si ritiene raggiunto se la differenza fra gli spostamenti di due nodi dell'elemento risulta superiore ad 1/50 della distanza fra i nodi.

Le verifiche sono analoghe nel caso in cui sia condotta una verifica classica di portanza delle

fondazioni, con la sola differenza che in questo caso lo spostamento ultimo del terreno è assunto

pari a quello di limite elastico.



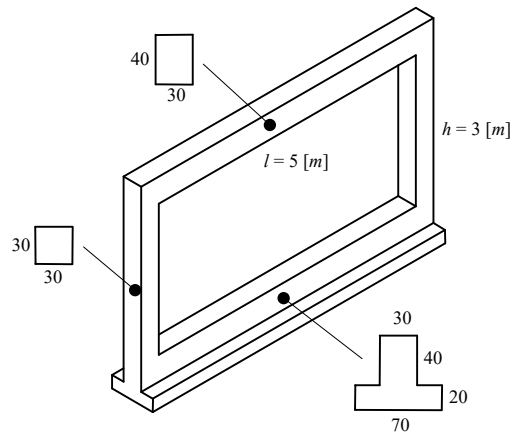
## Test di validazione formulazione non lineare

È stata eseguita una prova di validazione del modulo di calcolo *C.D.Gs. Win* determinando il coefficiente di sicurezza delle fondazioni del telaio a campata unica fondato su trave rovescia le cui caratteristiche geometriche sono riportate in figura 3. Il telaio è soggetto ad un carico verticale linearmente distribuito applicato sulla trave in elevazione definito dai seguenti valori iniziale e finale  $q_{iniz} = -1.2 [t/m]$  e  $q_{fin} = -2.3 [t/m]$ . Nell'analisi sono stati trascurati gli effetti dovuti al peso proprio degli elementi strutturali.

Le caratteristiche meccaniche del suolo di fondazione sono riportate in tabella II:

Costante di <i>Winkler</i>	$\varepsilon_w = 10 [kg/cm^3]$
Peso specifico	$\gamma = 1800 [kg/m^3]$
Angolo d'attrito	$\varphi = 35^\circ$
Coesione	$c = 0 [kg/cm^2]$

**Tab. II.** Parametri meccanici suolo di fondazione

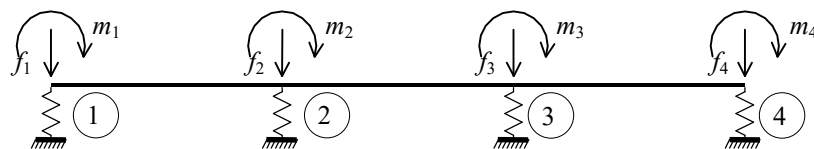


**Fig. 3.** Telaio fondato su trave rovescia

La verifica di portanza delle fondazioni eseguita con il modulo di calcolo automatico *C.D.Gs. Win* fornisce il moltiplicatore di collasso  $\lambda_u = 17.550$ .

È di seguito riportato il calcolo manuale del moltiplicatore  $\lambda_u$  secondo la procedura sopra descritta per valicare il risultato fornito da *C.D.Gs. Win*.

Adottando un numero di suddivisioni della trave di fondazione  $n_{sudd} = 3$ , lo schema statico da risolvere per eseguire la verifica di portanza è quello rappresentato in figura 4, formato da tre aste di lunghezza  $\Delta l = l/n_{sudd} = 1.667 [m]$  collegato al suolo da 4 molle:



**Fig. 4.** Modello per la verifica di portanza

Le rigidezze iniziali  $k_{w,i}$  e le forze di limite elastico  $p_{y,i}$  delle molle sono determinate a partire dalla geometria della trave, dalla costante di *Winkler*  $\varepsilon_w$  e dal carico limite della trave che risulta  $Q_{\lim} = 169.9 [t]$ . Per le molle si ha quindi:

$$\mathbf{k}_w = \begin{Bmatrix} \varepsilon_w b_w \Delta l / 2 \\ \varepsilon_w b_w \Delta l \\ \varepsilon_w b_w \Delta l \\ \varepsilon_w b_w \Delta l / 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 81750 \\ 163500 \\ 163500 \\ 81750 \end{Bmatrix} [kN \cdot m^{-1}]$$

$$\mathbf{p}_y = \begin{Bmatrix} Q_{\lim} / (2n_{sudd}) \\ Q_{\lim} / n_{sudd} \\ Q_{\lim} / n_{sudd} \\ Q_{\lim} / (2n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 277.786 \\ 555.573 \\ 555.573 \\ 277.786 \end{Bmatrix} [kN]$$

avendo indicato con  $b_w = 1.0 [m]$  la larghezza del magrone della trave di fondazione.

Le forze ed i momenti nodali agenti sono determinate a partire dai corrispondenti valori globali scaricati sulla trave dalla sovrastruttura, che sono  $f_{tot} = 8750 [kg]$  e  $m_{tot} = 229167 [kg \cdot cm]$ .

Risulta quindi:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_{tot} / (2n_{sudd}) \\ f_{tot} / n_{sudd} \\ f_{tot} / n_{sudd} \\ f_{tot} / (2n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.306 \\ 28.613 \\ 28.613 \\ 14.306 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_{tot} / (2n_{sudd}) \\ m_{tot} / n_{sudd} \\ m_{tot} / n_{sudd} \\ m_{tot} / (2n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.747 \\ 7.494 \\ 7.494 \\ 3.747 \end{Bmatrix} [kN \cdot m]$$

Modellando la struttura di figura 4 come piana, l'equazione di equilibrio della stessa può essere scritta nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_w & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & \mathbf{K}_{\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix}$$

Nella precedente relazione  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\phi}$  sono i sottovettori dei gradi di libertà nodali e  $\mathbf{K}_w$  è la matrice diagonale delle rigidezze delle molle:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{K}_w = \begin{bmatrix} k_{w,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{w,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{w,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{w,4} \end{bmatrix}$$

Le sottomatrici di rigidezza  $\mathbf{K}_u$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}$  e  $\mathbf{K}_\phi$ , utilizzando le unità di misura  $kN$  per le forze e  $m$  per le lunghezze, risultano:

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} 6.005 \cdot 10^5 & -6.005 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -6.005 \cdot 10^5 & 1.201 \cdot 10^6 & -6.005 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -6.005 \cdot 10^5 & 1.201 \cdot 10^6 & -6.005 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & -6.005 \cdot 10^5 & 6.005 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \begin{bmatrix} 5.004 \cdot 10^5 & 5.004 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -5.004 \cdot 10^5 & 0 & 5.004 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -5.004 \cdot 10^5 & 0 & 5.004 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & -5.004 \cdot 10^5 & -5.004 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_\phi = \begin{bmatrix} 5.56 \cdot 10^5 & 2.78 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 2.78 \cdot 10^5 & 1.112 \cdot 10^6 & 2.78 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 2.78 \cdot 10^5 & 1.112 \cdot 10^6 & 2.78 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 2.78 \cdot 10^5 & 5.56 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Risolvendo la struttura in oggetto nell'ipotesi di molle a comportamento elastico lineare si ottengono i seguenti abbassamenti nodali:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.287 \cdot 10^{-4} \\ 1.619 \cdot 10^{-4} \\ 1.881 \cdot 10^{-4} \\ 2.213 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad [m]$$

Il moltiplicatore dei carichi  $\lambda_1$  cui corrisponde la prima plasticizzazione di una molla si determina come:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{u_{y,i}}{\bar{u}_i^{(1)}} ; \quad i = 1, K, 4 \right\}$$

essendo  $u_{y,i} = p_{y,i} / k_{w,i}$  gli spostamenti di limite elastico delle molle.

Risulta:

$$\lambda_1 = \frac{u_{y,4}}{\bar{u}_4^{(1)}} = 15.355$$

Sotto le forze esterne  $\lambda_1 \mathbf{f}$  e  $\lambda_1 \mathbf{m}$  si ha quindi la plasticizzazione della molla 4 e gli spostamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \lambda_1 \bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.976 \cdot 10^{-3} \\ 2.487 \cdot 10^{-3} \\ 2.888 \cdot 10^{-3} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} [m]$$

Incrementando le forze di  $\Delta\lambda$  queste saranno equilibrate da una struttura analoga a quella di figura 4 ma priva della molla del nodo 4, e quindi nella matrice  $\mathbf{K}_w$  dovrà essere posta pari a 0 la 4° componente della diagonale principale. Sotto tale incremento di forze gli abbassamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(1)} + \Delta\lambda \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.976 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 4.539 \cdot 10^{-5} \\ 2.487 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 1.346 \cdot 10^{-4} \\ 2.888 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 3.677 \cdot 10^{-4} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 8.716 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} [m]$$

essendo  $\bar{\mathbf{u}}^{(2)}$  il vettore degli abbassamenti nodali ottenuti dall'equazione di equilibrio avendo però modificato come descritto la matrice  $\mathbf{K}_w$ .

Il moltiplicatore dei carichi  $\lambda_2$  cui corrisponde la plasticizzazione di una seconda molla si determina come:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_2 = \lambda_1 + \min \left\{ \frac{u_{y,i} - u_i^{(1)}}{\bar{u}_i^{(2)}}; \quad i = 1, K, 3 \right\}$$

e risulta:

$$\Delta\lambda_2 = \frac{u_{y,3} - \lambda_1 u_3^{(1)}}{\bar{u}_3^{(2)}} = 1.388 \quad ; \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 16.743$$

Sotto le forze esterne  $\lambda_2 \mathbf{f}$  e  $\lambda_2 \mathbf{m}$  si ha quindi la plasticizzazione della molla 3 e gli spostamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} + \Delta\lambda_2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2.039 \cdot 10^{-3} \\ 2.673 \cdot 10^{-3} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} \\ 4.608 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} [m]$$

Incrementando ancora le forze di  $\Delta\lambda$  queste saranno equilibrate da una struttura analoga a quella di figura 4 ma adesso priva delle molle dei nodi 3 e 4, e quindi nella matrice  $\mathbf{K}_w$  dovranno essere poste pari a 0 le 3° e 4° componente della diagonale principale. Sotto tale incremento di forze gli abbassamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(2)} + \Delta\lambda \bar{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2.039 \cdot 10^{-3} - \Delta\lambda \cdot 6.900 \cdot 10^{-4} \\ 2.673 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 8.700 \cdot 10^{-4} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 3.375 \cdot 10^{-4} \\ 4.608 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 6.351 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad [m]$$

essendo  $\bar{\mathbf{u}}^{(3)}$  il vettore degli abbassamenti nodali ottenuti dall'equazione di equilibrio avendo però modificato come descritto la matrice  $\mathbf{K}_w$ .

Il moltiplicatore dei carichi  $\lambda_3$  cui corrisponde la plasticizzazione di un'altra molla si determina come:

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_3 = \lambda_2 + \min \left\{ \frac{u_{y,i} - u_i^{(2)}}{\bar{u}_i^{(3)}}; \quad i = 1, 2 \right\}$$

e risulta:

$$\Delta\lambda_3 = \frac{u_{y,2} - u_2^{(2)}}{\bar{u}_2^{(3)}} = 0.833 \quad ; \quad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_3 = 17.576$$

Sotto le forze esterne  $\lambda_3 \mathbf{f}$  e  $\lambda_3 \mathbf{m}$  risultano quindi plasticizzate le molle 2, 3 e 4. In tale condizione la struttura non è più in grado di equilibrare incrementi delle forze applicate e quindi il moltiplicatore  $\lambda_3$  coincide con quello ultimo.

Il risultato ottenuto mostra un ottimo accordo fra il valore fornito dal codice di calcolo e quello esatto. L'errore percentuale è infatti poco superiore allo 0.1% come di seguito mostrato:

$$err = 100 \cdot \frac{|\lambda_3 - \lambda_u|}{\lambda_3} = 0.14\%$$